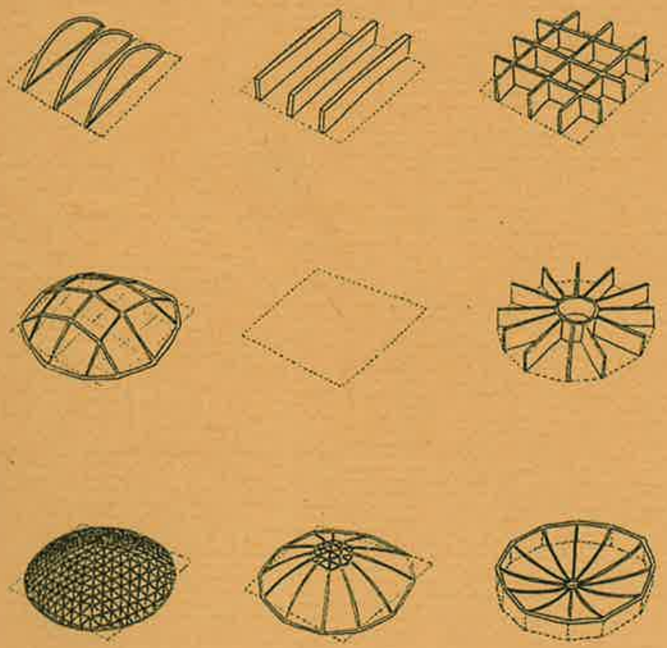
FORMA Y ESFUERZOS ESTRUCTURALES

por

JAIME CERVERA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-48-01

FORMA Y ESFUERZOS ESTRUCTURALES

por

JAIME CERVERA

CUADERNOS
DEL · INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-48-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
48 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

Forma y esfuerzos estructurales

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Pablo Vegas González.
CUADERNO 110.02 / 1-48-01
ISBN: 84-9728-047-4
Depósito Legal: M-46875-2002

Forma y esfuerzos estructurales

Jaime Cervera, jcervera@aq.upm.es v1.6, Mayo 2001.

El objetivo del texto es analizar el comportamiento estructural desde la perspectiva de la forma de la estructura, determinando los parámetros de forma especialmente relevantes. Esto permitirá comprender los medios —herramientas de transformación formal— que pueden emplearse para recorrer un amplio abanico tipológico, con especial énfasis en los tipos de cubierta, como si de un continuo se tratase. En este continuo el comportamiento global será idéntico en todas las estructuras, por más que pueda materializarse localmente de modo diversificado en tipos formalmente diferenciados. Este texto, empezado con motivo de mi intervención en un curso de doctorado promovido en Cádiz por Julio Malo de Molina (curso 1998-1999), expone conceptos y métodos intuidos y desarrollados inicialmente por Ricardo Aroca en diversos cursos sobre criterios de diseño estructural, enriquecidos por aportaciones muy diversas, entre las que deben citarse las tesis de José Luis de Miguel y José Luis Fernández Cabo, dirigidas por el mismo autor.

Índice General

1 Introducción. Signo y sentido estructural.

En el viejo discurso teórico estructuralista sobre la Arquitectura se hace referencia al doble papel de signo y de significado de los elementos que componen la obra arquitectónica, y de ésta en su conjunto. Signo, en tanto que aquello que es percibido remite a un área de sentido determinado: el contenido semántico a que alude dicho signo. Pero además de signo es asimismo significado, en cuanto que el objeto percibido es un objeto dotado de sentido, al jugar un papel definido en la obra arquitectónica misma, papel que constituye el contenido semántico propio de dicho objeto.

La estructura portante de un edificio tiene un contenido semántico incontrovertido: es la responsable cabal de que la *firmitas* se haga realidad, pero su papel como signo puede ser menos evidente en la confusión del fin de siglo, en la que el único valor triunfante, aunque sea en el efímero período de popularidad que nos corresponde según Warhol, parece residir en la eficacia mediática, en la capacidad de focalizar la despreocupada atención pública en torno al propio espectáculo, dirigiéndola hacia los objetivos publicitarios —de intención comercial o política— a que se destina dicho espectáculo. Y así es fácil interpretar la intención que subyace tras la estructura de edificios emblema, como el Guggenheim-Bilbao, en el que no se trata tanto —o no sólo— de asegurar la firmeza de la propia obra, cuanto de mostrar al mundo la capacidad de la industria vasca para realizar cualquier objeto por complicado que sea —y aquí podría recordar la distinción entre complicado y complejo que Saenz de Oiza ha empleado profusamente en su magisterio, y que nos ha enseñado a apreciar lo complejo a la par que a tratar de evitar lo complicado—

Pero al parecer el discurso teórico, pese al acelerado ritmo con que destruye los valores aclamados hace no tanto tiempo, no renuncia finalmente de modo absoluto a lo que parecería evidente desde la perplejidad del no iniciado: el valor arquitectónico puede estar íntimamente ligado a la capacidad autoreferencial del signo arquitectónico, es decir, a la capacidad del objeto como signo de aludir a sí mismo como significado, o la capacidad de sus componentes de aludir a sus propias cualidades, valor que un personaje tan poco próximo al mismo, como Peter Eisenmann, ha atribuido sin embargo a obras emblemáticas como el Cristal Palace. Y según esta opción le correspondería a la estructura no sólo la capacidad de asegurar la *firmitas*, sino la de significarla, la de hacerla aparente al observador. La estructura en tal caso aludiría a su propio contenido semántico, sería signo de dicho sentido, y dado que lo que es percibido como signo es su forma, o las constricciones que su forma pueda imponer al resto del objeto arquitectónico, habría de materializar en dicha forma los complejos campos tensodeformacionales con que se materializan los requisitos de firmeza que asegura en el edificio.

La forma estructural, pues, no sólo está en la base de la estabilidad de la obra, sino que alude a dicha estabilidad, es signo de la misma. Así, la geometría con la que se hace manifestación de estabilidad es asimismo la que ha de materializar físicamente —en sus fuerzas internas— dicha estabilidad, si no estamos ocultando y *decorando* la forma estructural empleada. Dadas las restricciones derivadas de cuestiones como la protección frente al fuego, etc. ambas opciones son posibles, y su valor dependerá del resto de las opciones del proyecto en su conjunto.

Por ello resulta sugerente explorar tal capacidad autoreferencial en la estructura, y apoyar en esta exploración un discurso que contemple las relaciones entre forma y capacidad o eficacia estructural, es decir, que explore las cualidades geométricas de la forma estructural que están en la base de su eficacia como objeto dotado de sentido.

Dicha reflexión no debería suponer una restricción a la exploración o innovación formal arquitectónica o estructural, en el modo que que toda ciencia fija —acotando— su campo de atención, sino más bien un acicate para la exploración, al facilitar a posteriori la capacidad de agregación o combinación de formas por un mejor conocimiento de sus comportamientos.

Para esta reflexión nos remitimos, pues, al sentido propio de las estructuras, su capacidad portante, y vamos a emplear como herramientas teóricas y críticas las propias de este campo teórico-técnico. Se describen inicialmente en este apartado de forma genérica las ditintas partes del discurso que se detalla en apartados siguientes, para permitir comprender las relaciones entre los mismos. Tras una breve reflexión sobre las relaciones entre forma y estructura en la construcción clásica, y la nueva perspectiva que el análisis de estructuras aporta a dichas relaciones, se pasa a describir las cualidades estructurales requeridas en general en edificación, en la que los edificios institucionales constituyen un caso particular. Se muestra la necesidad y la posibilidad de un lenguaje que permita comparar tipos estructurales diferenciados, y se eligen las magnitudes apropiadas para ello. Se exploran posteriormente las implicaciones de tales conceptos en los tipos estructurales formalmente más diversos, que son los tipos de cubierta.

1.1 Estructura y forma.

Como hemos visto, la geometría estructural puede jugar un doble papel. En los tipos constructivos clásicos las propiedades de semejanza asociadas a las condiciones de estabilidad y resistencia, han permitido constituir, por repetición de soluciones correspondientes a un mismo tipo, la acumulación de imágenes correspondientes a soluciones semejantes. Y dicha acumulación ha permitido crear una experiencia visual que asocia la estabilidad con ciertas configuraciones y proporciones. La misma posibilidad de existencia de las reglas proporcionales que han sido concebidas y utilizadas con rigor y con éxito en la construcción en la antigüedad está en la base de la posibilidad de existencia de una cultura perceptiva aplicada a la apreciación de la estabilidad de las obras realizadas con dichos tipos constructivos. Con la aparición, en el siglo XIX de los materiales *modernos* —ahora antigüos realmente, en tanto tienen más de un siglo de existencia en sus formas de empleo estándard— desapareció dicha relación entre forma y condición de estabilidad, puesto que los nuevos materiales daban origen a relaciones de proporción radicalmente diferentes a las aplicables con los materiales precedentes. Pero además con su empleo se inició el uso de herramientas matemáticas no geométricas y de alto grado de abstracción, poniendo en crisis la idea misma de la posibilidad de aplicar reglas de proporción en su manipulación. Y sin embargo, en los tipos estándares es fácil reparar en la existencia de *proporciones estáticamente aceptables*, como puede comprobarse fácilmente en la experiencia perceptiva de las estructuras de piso de hormigón armado y forjados convencionales.

Sin embargo, el mayor papel de los nuevos materiales puede atribuirse a la creación de tipos constructivos y estructurales radicalmente nuevos, como las vigas trianguladas con el acero, o las láminas en el caso del hormigón, en los que la idea de proporción quedó aparentemente erradicada, creando una disociación generalizada entre los atributos arquitectónicos de forma y firmeza que habían estado anteriormente ligados.

Y sin embargo hoy es posible reconstruir una asociación exacta entre forma y estabilidad —basta para ello analizar el cumplimiento de los requisitos estructurales de las formas en cuestión, lo que puede hacerse para todas ellas— y de esa reconstrucción puede además obtenerse el subconjunto de parámetros de la forma que gobiernan dichas condiciones de estabilidad. De tal modo que empleando las capacidades teóricas y críticas que el análisis pone a nuestro alcance, pero aplicando nuevamente el énfasis en los atributos de la forma, podría volver a asociarse signo y sentido en las estructuras portantes que usamos en la arquitectura.

1.2 Teoría y crítica estructural

El objeto de la crítica es explorar y predecir la validez de la obra. Para ello analiza los modelos u objetos que se presentan ante ella. La *crítica estructural*, a diferencia de gran parte de los procedimientos críticos en otros ámbitos de la arquitectura, goza de un grado de consenso casi universal entre los especialistas en este ámbito del conocimiento científico-técnico. O lo que es igual, las afirmaciones que distintos miembros de este colectivo de especialistas podrían hacer sobre la adecuación de una estructura concreta serían concordantes en gran parte de los casos —no en todos—. Hay múltiples modos de someter a crítica un objeto desde la perspectiva de su comportamiento estructural. Evidentemente es la experiencia el modo último de validación: todo objeto termina siendo experimentado en la realidad. Pero la existencia de una teoría que puede ser constrastada con la experiencia es la base del conocimiento científico, y en el caso de la mecánica estructural, se trata de una realidad con varios siglos de existencia. De modo que la teoría permite predecir en buena medida y con muy alta fiabilidad las prestaciones que cabe esperar de un objeto adecuadamente representado y analizado, y por ello es ahora el modo fundamental de crítica empleado.

Ahora bien, la capacidad de análisis de la teoría sólo puede aplicarse a objetos predefinidos. Y tanto más definido debe estar el objeto cuanto más precisión requiramos en la previsión teórica. De tal modo que para poder aplicar las capacidades críticas de la teoría de análisis de estructura hemos de tener previamente predefinida la estructura. Cabe decir que, para esta teoría, no son visibles los objetos estructurales que no estén suficientemente o completamente definidos. De ello resulta que el proceso de proyecto de una estructura no puede escapar a las servidumbres de todo proyecto, que exigen un proceso de aproximación en ciclos en los que las tomas de decisión poco o escasamente motivadas, o adoptadas inicialmente en base a motivaciones ajenas a la propia lógica estructural, son a menudo un ingrediente imprescindible para el avance. Pues en muchas ocasiones la única manera de avanzar es definir más el objeto aun cuando las decisiones adoptadas en dicha definición puedan ser erróneas, lo que sólo revelará el análisis posterior, que no puede ser realizado si no han sido adoptadas dichas decisiones. El análisis permitirá validarlas o rechazarlas, dando paso a una fase de mayor conocimiento sobre el problema planteado.

De este modo el proceso de análisis es poderoso, pero el proceso de decisión previo se mantiene relativamente ciego, y lo es ahora en mayor grado que lo fué en la era de la proporcionalidad, al hacerse mucho más énfasis en las capacidades y métodos analíticos que en los procesos de concepción previos. Sin embargo, si se emplean las capacidades que ofrece el análisis a la exploración de tipos estructurales alternativos y a la comparación entre las respuestas que tales tipos ofrecen a los problemas que deben resolver, pueden volver a reformularse con cierta precisión las relaciones entre forma y firmeza, que conocidas e interiorizadas permiten mantener el control sobre las exigencias estructurales en todas las fases de diseño, incluso las muy tempranas. Pues en efecto, en las fases iniciales de la concepción arquitectónica, la herramienta central de exploración y modelado es la geometría, de modo que si las exigencias estructurales quedan descritas en clave geométrica pueden ser contrastadas en las ambigüas descripciones preliminares de los objetos arquitectónicos, y de sus componentes estructurales.

Por lo tanto, mediante el análisis comparado del comportamiento estructural de elementos de complejidad creciente trataremos de establecer con rigor los aspectos —parámetros— de la forma de mayor relevancia en el comportamiento de la estructura.

Para ello es imprescindible el empleo del concepto de *eficacia*. En efecto, distintas soluciones estructurales a un mismo problema habrán de resolver en modo comparable las restricciones estructurales impuestas —las restricciones de *resistencia*, *rigidez* y *estabilidad*— por lo que cabe decir que desde la perspectiva propia de la *firmitas* habrían de ser idénticas. O de lo contrario no se trataría de comparar entre distintas soluciones estructurales como alternativas posibles a un mismo problema, sino que las soluciones aportadas a dicho problema serían de muy diferente calidad, de modo que la pura capacidad o incapacidad de respetar los requisitos establecidos sería la que decantaría la decisión. Si, sin embargo, consideramos que hay soluciones posibles alternativas es porque todas ellas son capaces de cumplir los requisitos estructurales en igual medida, con igual seguridad.

Por lo tanto la comparación entre éstas debe incorporar un concepto adicional, que es, como ya hemos dicho, el de la *eficacia* con la que son capaces de cumplir tales requisitos. Dicho concepto podrá además integrar en sí a las estructuras incapaces de respetar los requisitos estructurales, pues bastará asignar a éstas una eficacia nula, de modo que el análisis comparado puede aplicarse a la totalidad de las estructuras concebibles, sean o no solución al problema planteado. El análisis comparado en términos de *eficacia* permite seleccionar de entre las soluciones disponibles las mejor adaptadas para resolver el problema propuesto, y determinar en ellas, finalmente, los aspectos de la forma que comparten o que las diferencian.

Ello permitirá expresar, finalmente, la *eficacia* en términos de los parámetros de forma que hayamos podido aislar, lo que permitirá cumplir el objetivo propuesto, a saber, controlar la influencia que las decisiones formales adoptadas comportan sobre el comportamiento y la idoneidad de la estructura que se proyecta.

Hay muchas medidas posibles de la eficacia estructural habiendo sido una de las más empleadas la relación entre la carga soportada y el peso propio. Uno de los problemas básicos de tales medidas está en que los pesos incorporan las decisiones sobre materiales, de modo que los aspectos derivados de la forma pura no aparecen totalmente diferenciados de los asociados a las cualidades de los materiales empleados. Por otro lado en dicha medida no queda definido de modo explícito la dificultad intrínseca del problema estructural, haciendo que soluciones de idéntica calidad puedan tener relaciones carga/peso diferentes debido a que los problemas que acometen son de magnitud diferente. Por ello se precisa el empleo de una medida más rigurosa, más matizada, que detallaremos más adelante. Antes vamos a recordar, en un rápido repaso, las herramientas teóricas de que disponemos.

1.3 Conceptos estructurales básicos

Las estructuras se destinan, como es suficientemente conocido por lo que no me extenderé en ello, a asegurar la supervivencia de los edificios frente a las **acciones** mecánicas derivadas de la gravedad, los meteoros —en el sentido clásico de fenómenos que acontecen en la esfera sublunar— las modificaciones de geometría o de las cualidades de los materiales a corto o largo plazo por razones variadas —térmicas, reológicas o higroscópicas, corrosión—, etc. El papel de la estructura en el aspecto mecánico consiste en conectar las acciones entre sí, y con las **reacciones** del terreno, a la vez que dotar al edificio de la capacidad —pasiva en general— de soportarlas.

Al estar sometidos a dichas acciones, los materiales que forman la estructura se ven sometidos a **esfuerzos** internos y **deformaciones**. Cada punto o región material que podamos aislar para su análisis estará en cada instante sometido a un estado de esfuerzo y deformación. Tales estados están íntimamente ligados entre sí mediante lo que denominamos —en una transposición casi directa de su título inglés— **relaciones constitutivas** o relaciones materiales. Éstas no son más que la expresión teórica de las cualidades elasto-plásticas del material considerado, y definen todas las combinaciones de esfuerzo-deformación que pueden considerarse posibles en el material.

Puede afirmarse de una estructura en la que se describe un campo de estados de esfuerzo-deformación que cumple dichas relaciones que el estado tensodeformacional correspondiente es un estado **materialmente admisible**.

Los esfuerzos internos establecen el equilibrio entre cargas y reacciones, y constituyen un campo en **equilibrio, o estáticamente admisible** verificable en cualquier región de la estructura.

Las deformaciones provocan **desplazamientos** o movimientos generalizados en todos los puntos de la estructura, y definen en ella un campo de desplazamientos **compatible, o cinemáticamente admisible**.

En la descripción del estado completo de la estructura —material, estático y cinemático— se emplean usualmente conceptos agregados de esfuerzo o deformación útiles en cada tipo de elemento estructural

- tensores de tensión y de deformación para la descripción del estado de puntos de la estructura
- resultantes de esfuerzo normal y de dilatación unitaria para la descripción de secciones —*rebanadas*— de barras sometidas a fuerzas axiales
- resultantes de momento y curvatura para secciones —*rebanadas*— de barras solicitadas por esfuerzos de flexión
- resultantes de cortadura, y distorsión deben acompañar a las anteriores
- tensores de esfuerzo normal y tangencial y deformaciones asociadas de dilatación y distorsión, correspondientes a los estados planos de tensión y deformación en cada punto del plano medio de una superficie estructural con comportamiento de membrana
- tensores de momento flector y de curvatura asignados a cada punto del plano medio de una superficie estructural con flexiones, como las placas.

En la lista anterior, que incluye la mayoría de las representaciones de esfuerzos y deformaciones empleadas, aun cuando no es exhaustiva, a cada término de esfuerzo le corresponde su dual de deformación, es decir, la deformación asociada en el sentido energético, la que debe considerarse conjuntamente con dicho esfuerzo en la contabilidad del trabajo de deformación.

Es de gran utilidad en la teoría el empleo de los conceptos de **energía potencial**, **trabajo mecánico**, etc. y entre éstos el de **trabajo de deformación**, obtenido integrando en el proceso de carga de la estructura el trabajo realizado por los esfuerzos internos al deformar la estructura. Pues en efecto, uno de los teoremas básicos de la teoría, **el principio de los trabajos virtuales**, permite comprobar la admisibilidad estática o cinemática de cualquier estado al establecer que es nulo el trabajo realizado por un estado de cargas-esfuerzos estáticamente admisible en el movimiento definido por un estado de desplazamientos-deformaciones compatible —o más sintéticamente, al afirmar que el producto escalar entre ambos estados se anula—

El análisis de estructuras consiste en determinar los estados de esfuerzo y deformación representativos de aquellos a los que pueden verse sometidos las estructuras analizadas a lo largo de su vida útil, y asegurar que respetan las limitaciones impuestas. Se estudian usualmente, para cada caso de carga posible, los estados que cumplen simultáneamente las tres condiciones de admisibilidad estática, cinemática, y material. Es decir, el análisis determina para cada caso de carga el estado que verifica simultáneamente los tres grupos de ecuaciones definidos por dichas condiciones. Y ello es así inevitablemente en la mayor parte de los casos, que corresponden a estructuras hiperestáticas, dado que en éstas es sólo el cumplimiento de las tres condiciones simultáneas el que determina unívocamente el estado de la estructura, tanto si se analiza ésta elásticamente —**análisis elástico**—, como si se trata de determinar la configuración y carga de colapso —**análisis límite**— o en las situaciones en las que se analiza la historia de la respuesta elastoplástica de la estructura a las acciones impuestas. Y aunque en estructuras isostáticas basta el conjunto de condiciones de equilibrio para determinar unívocamente el estado de la estructura, sin embargo la información necesaria para la aceptación de dicho estado exige igualmente el conocimiento de sus movimiento así como el de los estados tensodeformacionales de los materiales que la componen, conocimientos ambos imprescindibles para certificar la validez de la solución obtenida.

Para asegurar la supervivencia de las estructura, los esfuerzos (o las deformaciones internas) deben estar limitados —**criterio de resistencia**— y para asegurar la compatibilidad con el uso a que se destina, los movimientos han de estar limitados —**criterio de rigidez**—.

La tarea del proyectista de estructuras es asegurar que se respetan los **requisitos estructurales**, que incluyen las anteriores limitaciones, y que ello es posible a un coste limitado, lo que puede considerarse un requisito adicional, aunque de orden muy diferente.

Aunque la generalidad de los anteriores conceptos permite dar cuenta de la manera de enfrentarse al análisis de estructuras muy diversas, pues son aplicables a tipos cualesquiera de estructuras, no son sin embargo apropiados para la comparación de la eficacia estructural en tipos diversos que cumplan los requisitos con igual grado de exigencia, por lo que se comprende la necesidad de emplear nuevos conceptos agregados capaces de comparar estructuras diferentes que resuelven problemas idénticos o parecidos. Para ello, y como ya hemos visto, las magnitudes de volumen o de peso de la estructura tienen una cierta utilidad, pero al depender de los materiales empleados no son suficientemente adecuadas. Por las razones ya apuntadas vamos a emplear una nueva magnitud que describimos a continuación, denominada, siguiendo a Ricardo Aroca, **cantidad de estructura**, y que será la que se empleará como base de comparación entre estructuras distintas.

2 Cantidad de estructura. Su valor en tipos estructurales básicos

2.1 Cantidad de estructura

Se define dicha magnitud en estructuras formadas por barras sometidas a esfuerzos axiales, de sólo compresión o tracción, por la integral extendida a toda la estructura del valor absoluto del esfuerzo de la barra por el elemento diferencial de longitud

$$W = \int |N|\, dl.$$

Dicha magnitud es proporcional al volumen y al peso de la estructura si el uso del material es **estricto**, es decir, si en toda sección la tensión de trabajo del material es la misma, usualmente la tensión admisible, dado que en tal caso el esfuerzo normal es proporcional al área, que por las longitudes dará el volumen, que por el peso específico dará el peso total. Se dice en tal caso que se trata de una **estructura estricta**.

$$W = \int A\sigma\, dl = \sigma \int A\, dl = \sigma V = \frac{\sigma}{\rho}\rho V = \frac{\sigma}{\rho} P.$$

Debe señalarse aquí que la ley local de W, su distribución a lo largo de la pieza o la esructura —la derivada de W respecto de la longitud, que no es más que el valor absoluto del esfuerzo axil— sigue, si la estructura es estricta, la ley definida por las áreas de la solución estructural, ley a la que podemos llamar *ley de dimensionado*, empleando una de las dimensiones como base del dimensionado de la solución. Dada la estructura, y el problema estructural que resuelve, el *dimensionado* sería dicha dimensión de referencia, y la *ley de dimensionado*, una función de forma que describe la proporción entre la dimensión en cada punto y dicha dimensión de referencia, ley de forma que será idéntica para dimensionados proporcionales como podrían ser los derivados de cargas proporcionales en caso de no alterarse los sobredimensionados por razón del pandeo en barras comprimidas.

Volviendo a la cantidad de estructura, vemos que siendo proporcional al volumen o al peso de la estructura, es sin embargo una magnitud mucho más adecuada, pues no está ligada a cualidades del material utilizado, sino sólo a características de la solución estructural empleada. La magnitud tiene unidades de trabajo, y podría interpretarse como el *trabajo* que habrían de realizar las cargas para trasladarse hasta las posiciones donde se equilibran con las reacciones, siguiendo las líneas de fuerza que materializa la estructura, aunque de hecho no se de físicamente tal traslado. Si el uso del material no es estricto, o más sencillamente si la estructura no es estricta, la cantidad de estructura permite obtener cotas inferiores al volumen y al peso de la estructura, dado que en las secciones en que la tensión sea menor que la admisible se tendrán secciones mayores que las estrictas.

En estructuras de comportamiento no uniaxial, puede pensarse en su asimilación a sus análogas axiales, como serían las vigas trianguladas de cordones y diagonales para las vigas de sección continua; la enorme utilidad de las conclusiones alcanzables con el concepto así lo autoriza, extendiendo así el empleo del concepto a estos tipos estructurales.

Vemos ahora algunas estimaciones de las cantidades de estructura en tipos estructurales básicos. Dada la definición de la magnitud, sólo se están considerando en la exploración de los tipos estructurales correspondientes las necesidades derivadas del criterio de resistencia. Es decir que estaremos hablando de cargas, leyes de momento o cortante precisas para el equilibrio, etc., sin consideración por el momento de las cuestiones de rigidez o estabilidad, que se tratan más adelante.

2.2 Cantidad de estructura de barras comprimidas o traccionadas.

De la definición de la magnitud resulta evidente que ésta es, en barras comprimidas o traccionadas, igual al valor absoluto del esfuerzo de tracción o compresión por la longitud de la barra a lo largo de la que el esfuerzo se mantiene constante.

$$W = |N|l$$

La sencillez de la expresión es válida sólo en la medida en que le corresponde una sencillez análoga en el diseño de la barra, de sección constante. No se consideran aquí las necesidades de rigidez en el caso de la compresión, de cara a combatir el pandeo, o las peculiaridades de la realización de los nudos con que se enlazan las piezas con otras, que pueden suponer restricciones adicionales como cuando, en ciertos casos de piezas traccionadas, la unión tiene menor resistencia que la sección de base que enlaza.

2.3 Cantidad de estructura en vigas

Al analizar la cantidad de estructura en vigas debe hacerse mención al criterio elegido para definir éstas, entendiendo que, como primera aproximación, consideraremos bajo esta denominación sólo a las piezas de canto constante.

Aun con dicha restricción, el criterio con el que se diseñe la sección de la viga a lo largo de la directriz es básico en lo que sigue, existiendo en principio tres criterios usuales diferenciados, a saber:

- Diseño especializado y separado de cordones y del alma que une éstos. Es el único caso en que pueden obtenerse soluciones estrictas de modo general, constituyendo, por tanto, el caso paradigmático de la teoría de diseño. Correspondería al caso de piezas trianguladas o, en menor medida, al diseño de vigas armadas de chapa. Las decisiones de diseño sobre canto, espesor o sección de las alas, y espesor del alma son independientes.

- Diseño simultáneo de las alas y el alma, mediante la elección de un tipo básico de sección en el que las relaciones entre éstas son fijas, aun cuando puedan elegirse separadamente las dimensiones vertical y horizontal —canto y ancho o espesor— de la pieza. El caso paradigmático es el de las piezas realizadas con secciones homotéticas, como las rectangulares, en las que pueden, sin embargo, seleccionarse separadamente las dos dimensiones del rectángulo. También correspondería en alguna medida al diseño con perfiles laminados en acero si se consideran las posibilidades de elegir piezas no sólo en una de las posibles gamas sino en todas ellas, unido a la posibilidad de adosar lateralmente varias de esas piezas con igual canto para obtener anchuras variables. Las decisiones sobre canto y espesor son independientes, pero están ligadas las decisiones sobre espesor de las alas y del alma.

- Diseño regido por la selección de una sección de entre una serie monótona de ellas, como por ejemplo, al elegir entre secciones proporcionales de cualquier tipo, o en una de las series estandard de perfiles considerada aisladamente. En este caso la decisión sobre canto está ligada a las decisione sobre espesor de alas y espesor de alma.

Aunque los tres casos son de interés, en lo que sigue se analiza sólo el primero de ellos, dado que un objetivo de este texto es alcanzar una visión colectiva de las soluciones alternativas a formas de cubierta, en las que dicho primer caso es de especial relevancia.

2.3.1 Cantidad de estructura en cordones de vigas

Dado que el esfuerzo de cada cordón no es más que el momento flector partido por el brazo, la cantidad de estructura dispuesta en los cordones de un elemento de viga será igual a dos veces el valor del momento partido por el brazo multiplicado por el elemento de longitud, o lo que es lo mismo, si el brazo es constante, la cantidad de estructura en cordones será igual al doble del área de la gráfica de momentos resistida por la viga partido por el brazo. Debemos distinguir entre momento solicitación y momento resistido. La cantidad de estructura estricta estará asociada a la gráfica de momentos solicitación, mientras que el consumo real de material —de estructura— en la viga estará asociada a la gráfica de momentos resistida efectivamente por cada sección de ésta. Podemos emplear en ambos casos el término de *cantidad de estructura* correspondiente a las soluciones de sección estricta o la real, a fin de no añadir complejidad terminológica. Pero evitaremos la confusión entendiendo que el término se aplica en su acepción pura y rigurosa exclusivamente a estructuras diseñadas de forma estricta, mientras que en estructuras diseñadas con otros criterios el término se aplica de modo informal -y sin mayor pretensión teórica que el de dar una medida que mantenga en relación con la cantidad de estructura estricta la misma proporción que la que mantiene el peso de la estructura considerada con el peso de la correspondiente estructura estricta de igual material- La cantidad de estructura asociada de dicho modo informal a una estructura real correspondería en puridad a la cantidad de estructura de aquella que se diseñase para resistir la ley de esfuerzos que resiste dicha estructura efectivamente. En todo caso solo usaremos dicho modo informal de empleo del término en casos de comparación con soluciones estrictas, de modo que el contexto evitará la confusión.

Por lo tanto la cantidad de estructura de cordones de vigas es:

$$W_M = \int |N|\, dl = \int 2\frac{|M|}{z}\, dl = 2\frac{\tilde{M}}{z}$$

denotando con $\tilde{M}$ al área de la gráfica de momentos.

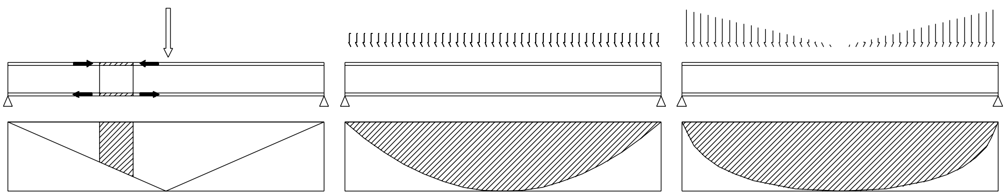


Figura 1: Gráfica de momentos y cantidad de estructura en cordones.

Es fácil obtener información relevante de esta magnitud, puesto que el área de la gráfica de momentos resistida por la viga es muy fácilmente determinable a partir de la luz de la viga, del momento isostático para el que ésta se diseña, y de las características de su diseño, como son fundamentalmente las condiciones de extremo y el dimensionado, ya sea constante o estricto, adoptado para sus cordones. Puede así establecerse el área en proporción a la del rectángulo formado por el isostático y la luz, considerando en lo sucesivo este área rectangular como área de referencia. Y por tanto puede evaluarse la cantidad de estructura basándose en el área de referencia multiplicada por la fracción que respecto de la misma supone la resistida por la viga de la solución considerada. Tenemos así una proporción entre la cantidad de estructura de cualquier solución, y la de la viga isostática de cordones constantes de igual momento isostático y canto, determinada directamente por la fracción entre las respectivas áreas de momento resisitidas por ambas soluciones.

Algunos casos de dicha fracción ψ para cargas puntuales en el centro, uniformemente repartidas, o doblemente triangulares con valor nulo en el centro y máximo en los apoyos se anotan en la tabla siguiente. Se incluyen en ella igualmente los correspondientes valores de momentos negativos de extremo en los casos empotrados, en relación al isostático, $\frac{M^-}{M_I}$.

Tipo de viga y carga	**puntual**	**uniforme**	**bitriangular**
Fracción del rectángulo $M_I l$			
Viga constante doblemente apoyada	1	1	1
Viga estricta doblemente apoyada	0,5	0,666	0,75
Viga constante doblemente empotrada	0,5	0,666	0,75
Viga estricta doblemente empotrada	0,25	0,25	0,21875
Fracción del momento negativo al isostático			
Viga constante doblemente empotrada	0,5	0,666	0,75
Viga estricta doblemente empotrada	0,5	0,75	0,875

Puesto que el área rectangular de referencia es el momento isostático por la luz, vemos que también puede evaluarse la cantidad de estructura en cordones como dos veces el producto del momento isostático por la esbeltez de la pieza y por la fracción del área de referencia que es efectivamente resistida por la viga.

$$W_M = 2\frac{\tilde{M}}{z} = 2\psi\frac{M_I l}{z} = 2\psi M_I \lambda$$

La importancia de esta expresión es que ofrece una posibilidad inmediata de interpretación en función de cualidades del problema y del diseño adoptado, como son el momento isostático la esbeltez y las condiciones de extremo y de diseño de los cordones.

2.3.2 Cantidad de estructura en el alma de vigas

Puede mostrarse con facilidad que ésta es igual a dos veces el área de cortantes efectivamente resistida por la viga en los casos de alma llena y triangulaciones a 45°, multiplicada por un factor de ineficacia que es mayor que 1 en triangulaciones con otros ángulos.

$$W_T = \int \frac{T}{\sin\alpha\cos\alpha}\, dl = \int \frac{2T}{\sin 2\alpha}\, dl$$
$$W_T > 2\tilde{T}$$

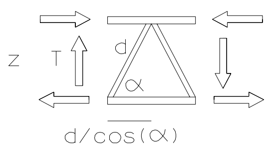


Figura 2: Cantidad de estructura en triangulación.

Podemos ver que el área de cortantes en soluciones simétricas es dos veces el momento isostático. Pues en efecto la integral del cortante entre el punto de cortante nulo y el apoyo en tales soluciones es el momento isostático, al ser la diferencia de momentos entre vano y apoyo. Dicha integral es también la mitad del área de cortantes, por lo que resultará que

$$W_T > 4M_I$$

El signo de desigualdad da cuenta del factor de ineficacia en tringulaciones diferentes de 45° así como del hecho de que el dimensionado puede no ser estricto. Algunos de estos factores de ineficacia son fáciles de deducir, como los *sobrecostes* de empleo del dimensionado constante frente a estricto, sin más que comparar las respectivas áreas de cortante efectivamente resistidas. En el caso de triangulaciones no óptimas, o de ángulos diferentes según familias de diagonales o montantes, basta hacer la suma de cada familia, resultando los sobrecostes γ de la tabla siguiente.

Tipo de alma	**factor de sobrecoste**
Alma continua o a 45° estricta	1
Alma constante (carga puntual)	1
Alma constante (carga uniforme)	2
Alma constante (carga bitriangular)	3
Soluciones a 30° o 60°	1,155
Soluciones a 45° y 90° (viga pratt)	1,5

Los sobrecostes por ineficacia en el ángulo deben multiplicarse por los derivados de sobredimensionar el alma respecto de la estrictamente necesaria para la ley de cortantes existente cuando se dan simultáneamente ambas circunstancias.

2.3.3 Cantidad de estructura total en vigas

Si sumamos las cantidades de estructura en cordones y triangulación tendremos expresiones que agrupan las áreas de momentos y las de cortantes. La expresión definitiva es del tipo

$$W_v > 2\psi M_I \lambda + 4\gamma M_I$$
$$W_v > 2M_I \lambda \psi \left(1 + \frac{2\gamma}{\psi\lambda}\right)$$

Puede observarse que el término constante dependiente del cortante puede ser de muy baja importancia en los casos de esbelteces usuales en edificación. La cantidad de estructura puede escribirse en términos de la carga total, y por ejemplo, para carga uniforme, con $M_I = ql^2/8 = Ql/8$, resulta de la forma

$$W_v > \frac{\psi}{4} Ql\lambda \left(1 + \frac{2\gamma}{\psi\lambda}\right)$$

2.4 Cantidad de estructura en arcos funiculares

Para poder comparar soluciones consideramos ahora el caso de arcos en los que el empuje se resuelve atirantando, y en los que las cargas se sitúan en la línea horizontal definida por el tirante, colgándose del arco mediante péndolas verticales. Suponemos el trazado del arco igual al antifunicular de las cargas, con apoyo en la misma cota vertical que éstas. En este caso la cantidad de estructura es la correspondiente a la suma de las del tirante las péndolas y el arco. La del tirante no es más que el empuje por la luz del arco. La de las péndolas no es más que la necesaria para colgar la carga del arco. Puede demostrarse, y lo veremos más adelante, que la cantidad de estructura del arco es idéntica a la suma de las anteriores, tirante más péndolas, por lo que su valor total sería fácil de cuantificar.

Vamos a comprobar de todos modos la cantidad de estructura que resulta en el arco, considerando que el esfuerzo y el elemento de longitud son colineales:

$$W_a = \int \vec{N} \cdot d\vec{s} = \int (H\,dx + T\,dz)$$

Como la componente horizontal H es constante, puede integrarse el primer sumando. Para el segundo empleamos la integración por partes, y el hecho de que la derivada de los cortantes globales son las cargas

$$W_a = Hl - \int z\frac{dT}{dx}\,dx = Hl + \int pz\,dx$$

En la integración por partes se ha empleado el hecho de integrar entre dos puntos que tienen, bien cortante cero —el eje de simetría de la estructura— bien cota vertical cero —los apoyos del arco—, de modo que el resultado confirma la afirmación: la cantidad de estructura del arco es igual a la del tirante Hl más la de las péndolas, medida por el segundo sumando.

Veamos pues el valor que resulta para el conjunto completo;

$$W_A = 2\left(Hl + \int pz\,dx\right) = 2\left(Hl + \int \frac{dT}{dx}z\,dx\right) = 2\left(Hl + \int T\frac{dz}{dx}\,dx\right)$$

$$W_A = 2\left(Hl + \int T\frac{T}{H}\,dx\right) = 2T_0l\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\int\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\frac{dx}{l}\right)$$

siendo α el cociente T_0/H, es decir la tangente del ángulo del arco en su arranque. En la expresión puede observarse que la cantidad de estructura tiene cuatro partes, dos comprimidas, procedentes del cálculo del arco, y dos traccionadas, procedentes de tirante más péndolas. La cantidad comprimida total iguala la traccionada total. Pero además, tanto la cantidad comprimida como la traccionada tienen otras dos partes, que pueden interpretarse como cantidad horizontal —la asociada a la componente horizontal H del tirante en éste, o ejerciendo su empuje a lo largo del arco— y vertical —la correspondiente a subir las cargas desde la línea entre apoyos al arco a través de las péndolas y volver a bajarla a través del arco— Veremos que la solución de mínima cantidad de estructura, la óptima, es la que resulta cuando se igualan las cantidades de estructura horizontal y vertical, quedando igualadas las cuatro partes citadas.

Si por ejemplo consideramos el caso de carga uniformemente repartida, $T_0l = 4M_I$, $\alpha = 4/\lambda$, siendo λ la esbeltez del arco. Asimismo, el multiplicando entre paréntesis de la derecha, expresado en función de la esbeltez, resulta igual a $\lambda(1/4 + 4/(3\lambda^2))$, de modo que para ese caso la cantidad de estructura total puede expresarse en la forma

$$W_{Au} = 2M_I\lambda\left(1 + \frac{16}{3\lambda^2}\right)$$

Un formato interesante para la anterior expresión se obtiene si se considera que la esbeltez óptima será aquella para la que se anule la derivada de W respecto de la esbeltez, lo que es trivial al ser M_I independiente de ésta. Esto sucede en este caso cuando $\lambda_o = \frac{4}{\sqrt{3}}$, con lo que resultará la expresión

$$W_A = 2M_I\lambda\left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right)$$

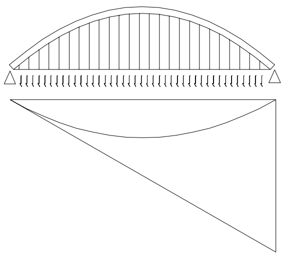


Figura 3: Arco parabólico para carga uniforme.

que puede demostrarse es de aplicación cualquiera que sea la ley de cargas considerada, y la correspondiente forma del arco trazado. Basta expresar la componente horizontal y la cota z del arco en función de la ley de momentos M, el momento isostático M_I, y el canto máximo del arco h:

$$W_A = \int 2\frac{M}{z}\,dx + \int 2zp\,dx$$
$$W_A = \int 2\frac{M_I z}{zh}\,dx + \int 2\frac{hM}{M_I}p\,dx$$
$$W_A = 2M_I\lambda + 2\frac{\int lMp\,dx}{M_I\lambda}$$
$$W_A = 2M_I\lambda\left(1 + \frac{\int lMp\,dx}{M_I^2\lambda^2}\right)$$

con óptimo para

$$\lambda_o = \frac{\sqrt{\int lMp\,dx}}{M_I}$$

lo que prueba la expresión.

El interés de ésta consiste en que en situaciones de simetría, el momento isostático es igual a la reacción —la mitad de la carga— multiplicada por la distancia de la resultante de la carga en media viga al apoyo, que es una fracción ϕ de la luz fijada por el tipo de carga, con lo que resulta como expresión para la cantidad de la estructura la siguiente:

$$W_A = \phi Ql\lambda\left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right)$$

expresión que tiene una altísima *expresividad*. Recordemos que ϕ vale $1/2$ con cargas puntuales, $1/4$ con carga uniforme, y $1/6$ con carga bitriangular.

2.5 Cantidad de estructura en otros tipos estructurales

Puede hacerse un recorrido más extenso por otros tipos estructurales, en particular los que corresponden a soluciones superficiales, como placas o láminas. Para ello bastará estudiar, como en los casos anteriores, las sumas de las cantidades de estructura de sus distintos elementos.

De entre tales tipos son de interés los que tienen apoyo sobre el perímetro de un recinto, como las placas o las familias de vigas cruzadas, o radiales, que frente a las vigas o arcos colocados paralelamente suponen una solución diferente desde la perspectiva de las cualidades del apoyo, y podrían igualmente ser consideradas diferentes en algunos casos desde la perspectiva del comportamiento estructural, al incluir casos de flexión bidireccional frente a la flexión unidireccional de las vigas.

A título de ejemplo consideraremos sólo dos casos particulares, a saber, la solución de vigas radiales de canto constante para resolver la cubierta de un recinto de contorno circular, y la solución para el mismo problema mediante un conjunto de vigas radiales y circunferenciales que puedan considerarse equivalentes a una solución de placa de dimensionado estricto, hacia donde apunta la solución del velódromo de Berlín. Analizaremos ambos casos para carga uniforme por unidad de superficie.

2.5.1 Cantidad de estructura de cerchas radiales sobre apoyo circunferencial.

En este tipo, la carga aplicada a cada cercha es la de sectores de círculo, de modo que se trata de cargas triangulares de valor nulo en el centro, y máximo en el apoyo. De hecho las expresiones que hemos obtenido para las vigas en general son de aplicación sin más que considerar el caso de carga apropiado. Si suponemos dimensionado estricto y triangulación óptima,

$$W = 2\frac{\tilde{M}}{z} + 2\tilde{T} = 2\psi M_I \lambda + 4M_I$$

Si referimos el problema a la unidad de longitud en el contorno, resulta que la reacción es la carga lineal unitaria máxima multiplicada por la luz y dividida por 4; la resultante de la carga está colocada a una distancia del apoyo equivalente a un sexto de la luz, de modo que el máximo momento es $ql^2/24$ —frente al $ql^2/8$ de las vigas paralelas— con ley de momentos de tercer grado. El factor ψ es, pues, 3/4. Por unidad de longitud del contorno el ahorro del dimensionado estricto frente al dimensionado constante de los cordones es de 1/4. Para el dimensionado de la triangulación la carga triangular supone una reacción igual a la carga lineal máxima multiplicada por un cuarto de la luz, y la ley de cortantes parabólica supone un área estricta igual al tercio de la correspondiente al dimensionado constante.

Resultan pues, para dimensionado constante, y llamando Q a la carga total sobre cada cercha:

$$W_M = 2\frac{ql^2}{24}\lambda = \frac{1}{6}Ql\lambda$$
$$W_T = 2\frac{ql}{4}l = Ql$$

Los ahorros sobre estas cantidades correspondientes al dimensionado estricto son de 1/4 en cordones y 2/3 en la triangulación.

Si consideramos el conjunto de cerchas que cubren todo el recinto, acumularán en total una carga que ahora es $Q = \pi R^2 q$ que es la que podremos emplear en el cálculo con las fórmulas precedentes dado el carácter aditivo de la magnitud considerada y la igualdad en las expresiones para todas las cerchas de que se componga la estructura completa.

2.5.2 Cantidad de estructura de "Placa" circular

El caso de la placa merece atención, pues se trata de una alternativa bidireccional a la red radial de cerchas. consideraremos aquí como *placa* una solución bidireccional triangulada, no necesariamente isótropa (por diferencia de dimensionado en direcciones ortogonales). Dada la simetría axial, se trata más bien de un emparrillado de vigas radiales y circunferenciales, en el que, al coincidir las direcciones principales de rigidez con las direcciones principales de esfuerzos, el comportamiento es de *placa*. Pero se trata de un problema que, desde la perspectiva del análisis es hiperestático, lo que exige para éste un dimensionado detallado. Ahora bien, desde la perspectiva del diseño los casos que son hiperestáticos para el análisis no suponen por el contrario mayor problema en ninguna de las circunstancias en que usualmente se presentan. Pues en efecto, lo que establece la teoría es que en las estructuras hiperestáticas deben cumplirse simultáneamente las condiciones de equilibrio, las de compatibilidad, y las que expresan las relaciones materiales, y esto puede establecerse directamente en las restricciones del diseño que se adopta.

Actuamos, pues así. Para ello establecemos un sistema de esfuerzos en equilibrio entre sí y con las cargas. Establecemos además un dimensionado de la estructura que, para este sistema de esfuerzos, haga que las deformaciones resultantes de las condiciones que regulan las relaciones entre deformación y esfuerzo —relaciones constitutivas de los materiales— sean directamente compatibles.

Elegimos como sistema de esfuerzos equilibrados los que resultan de igualar todos los momentos flectores circunferenciales —es decir, exactamente el sistema de esfuerzos que el modelo de placas en rotura atribuye a la placa circular—. Como relaciones constitutivas empleamos las que ligan momentos con curvaturas y cortantes con distorsiones, observando que los cortantes están sólo en las direcciones radiales y que la distorsión que les corresponde no afecta a las longitudes de los cordones. Elegimos finalmente como deformación compatible en cordones la que resulta de considerar las curvaturas de una deformada esférica en toda la superficie, lo que para canto constante y deformaciones pequeñas provocará curvaturas constantes en todo punto y dirección, y por lo tanto momentos en las secciones en proporción directa a las dimensiones establecidas en los cordones. Con estas condiciones resultará que basta elegir una ley de momentos equilibrada a ser resistida por las secciones, y dimensionar estrictamente éstas, para asegurar el equilibrio y la compatibilidad respetando las relaciones constitutivas aplicables.

Resulta entonces que los cortantes son iguales a la carga del sector esférico que soportan y los momentos circunferenciales son iguales en toda sección radial a $ql^2/24$. Los momentos radiales pueden determinarse a partir de éstos y de los cortantes, resultando una ley parabólica con máximo en el centro, que, expresada en función del diámetro ϕ considerado queda de la forma

$$M_r = \frac{ql^2}{24}\left(1 - \left(\frac{\phi}{l}\right)^2\right).$$

Con todo ello podemos proceder. Tendremos en primer lugar que la cantidad de estructura que resulta en montantes y diagonales en la solución estricta será la misma que la ya obtenida en el caso anterior, al tratarse sólo de cortantes en la dirección radial. En efecto, si el dimensionado es estricto, como la ley de cortantes es

$$T = \frac{qr}{2}$$

el doble del volumen de cortantes en toda la *placa* será

$$W_T = 2\int \frac{qr}{2} 2\pi r\, dr = 2\pi q \frac{R^3}{3} = \frac{1}{3}Ql$$

La cantidad de estructura teórica para dimensionado constante —cuando la densidad de barras del alma es isótropa e igual a la requerida junto a los apoyos— sería:

$$W_T = 2\pi R^2 T_m = QR = \frac{1}{2}Ql$$

La cantidad de estructura en cordones resultará de la suma de la de los cordones radiales y la de los circunferenciales. Si empleamos la expresión de dos veces el área de momentos dividida por el canto, extendida a toda la superficie de la placa, tendremos como cantidad de estructura el producto de dos veces el volumen de momentos dividido por el canto. La mejor manera de obtener éste es obtener el valor para momento constante —para dimensionado constante en ambas direcciones— y restar la parte de volumen que corresponde a la parte variable del momento radial.

El doble del volumen de ambos momentos dividido por z para dimensionado constante es:

$$W_M = \pi R^2 \frac{2}{z}\left(2\frac{ql^2}{24}\right) = q\pi R^2 \frac{l}{z}\frac{l}{6}$$

$$W_M = \frac{1}{6}Ql\lambda.$$

El ahorro por dimensionado estricto para los momentos radiales es, en volumen de momentos, y referido al momento máximo M

$$\tilde{M}_{ar} = M\int_0^R \left(\frac{\phi}{l}\right)^2 2\pi r\,dr = MR^2\int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^2 2\pi\frac{r}{R}\left(\frac{dr}{R}\right) = M\frac{\pi R^2}{2}.$$

Como puede verse equivale a la mitad del volumen correspondiente a los momentos radiales si se utilizase dimensionado constante, y por tanto a la cuarta parte del total del volumen de momentos. El ahorro total respecto del volumen considerado con dimensionado constante es pues de un cuarto de la cantidad de estructura total en cordones.

Puede verse que la solución estricta es idéntica en cantidad de estructura a la de cerchas radiales, lo que tiene una fácil explicación con conceptos que se muestran más adelante. La diferencia total entre las soluciones de cerchas radiales de dimensionado constante y la distribuida de placa, también con dimensionado constante, es en este caso debida sólo a la diferencia de dimensionado en las triangulaciones. Lo que sucede en éstas es que al tratar de mantener las dimensiones constantes resultan sobredimensionados mayores en el caso radial que en el distribuido de placa, pues en la solución radial las mismas barras tienen separaciones circunferenciales que disminuyen según nos acercamos al centro.

2.6 Resumen de valores de cantidad de estructura.

No vamos a seguir con más tipos, pues para comprender las cualidades de las soluciones obtenidas es preciso previamente revisar algunas de las propiedades fundamentales de la magnitud que estamos empleando, y las relaciones que mantiene con otras magnitudes en las estructuras para las que se hace mínima, que serían las óptimas desde este punto de vista.

Por otro lado, para enunciar las principales relaciones entre esta magnitud y las cualidades de la forma nos basta por ahora con los casos anteriores, que habrá todavía que analizar con más detalle desde conceptos propios de la forma misma.

Incluimos en cualquier caso aquí una pequeña tabla resumen de valores obtenidos hasta el momento, y aplicados ya a la comparación de soluciones estructurales. Por ello la tabla se aplica sólo a problemas de carga comparable: a problemas de carga uniforme por unidad de superficie.

En todos los casos unificamos el formato a expresiones dependientes de la carga total Q, la luz l, y la esbeltez λ.

Tipo estructural	Dimensionado estricto	Dimensionado constante
Viga doblemente empotrada	$Ql\left(\frac{\lambda}{12}+\frac{1}{2}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+1\right)$
Viga doblemente apoyada	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{4}+1\right)$
Arco parabólico	$Ql\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{4}{3\lambda}\right)$	–
Arco cúbico (arcos radiales)	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+\frac{6}{5\lambda}\right)$	–
Cerchas radiales	$Ql\left(\frac{\lambda}{8}+\frac{1}{3}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+1\right)$
Placa circular	$Ql\left(\frac{\lambda}{8}+\frac{1}{3}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right)$

2.7 Esbeltez óptima. Expresión general de la cantidad de estructura.

Hemos visto en los apartados precedentes que la cantidad de estructura resultaba ser el producto de la carga total por la luz multiplicado por un término que en muchos casos es igual a la suma de una constante con el producto de la esbeltez por un número. En otros casos, la constante que se suma está sustituida por el producto de un número con el inverso de la esbeltez.

Pueden expresarse todos los casos vistos en el formato

$$W > \phi Ql\left(\lambda+\frac{\alpha}{\lambda^i}\right)$$

siendo i cero o uno.

Si analizamos la expresión desde la perspectiva del óptimo, comprobamos que el caso de $i=0$ es teóricamente insatisfactorio: la esbeltez óptima resultaría la menor posible o la estructura óptima la de canto mayor posible—tendiendo éste, por tanto al infinito—. Pero con ese canto es irrealizable la triangulación a 45°. Igualmente puede decirse que el alma de la viga de alma llena resultaría de espesor nulo. Para muy bajas esbelteces el canto debe resultar gravoso para la cantidad de estructura, y podemos considerar que el correspondiente término suponga costes proporcionales al canto mismo para una luz dada por ejemplo por razón de la necesidad de un espesor mínimo, y por lo tanto inversamente proporcionales a la esbeltez, como resulta en el caso de los arcos analizados. En este caso en la forma general debería ser $i=1$, de la que puede deducirse la siguiente expresión

$$W > \phi Ql\lambda\left(1+\frac{\alpha}{\lambda^2}\right)$$

Ahora bien, es fácil ver que ésta última puede ser escrita en función de la esbeltez para la que resultaría óptima la estructura —para la que la cantidad de estructura alcanzaría un mínimo—, pues si en la cantidad de estructura suponemos carga y luz constantes y se varía la esbeltez el mínimo se dará para el caso en que la derivada respecto de ésta se anule, lo que sucede cuando $\alpha=\lambda_o^2$. De este modo

$$W > \phi Ql\lambda\left(1+\frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right)=\gamma Ql\lambda$$

La última forma de la expresión es de aplicación, coaun siendo γ función de λ, si se considera que en los casos más usuales la esbeltez real será alta en comparación con la óptima, y el término que disminuye con la esbeltez resultará pequeño —despreciable incluso a veces— en comparación con el otro.

Podría considerarse una forma algo más compleja si se completa el polinomio entre paréntesis con el término del grado que falta, —que por suponer consumo constante e independiente de la esbeltez no afectaría al óptimo— obteniendo la forma más general

$$W > \phi Q l \lambda \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right) = \gamma Q l \lambda$$

3 Cantidad de estructura y peso propio

Vimos que la cantidad de estructura podía ponerse en relación con el volumen y con el peso de la estructura sin más que considerar las propiedades pertinentes del material empleado:

$$P = \frac{\rho}{\sigma} W$$

Además hemos visto que la expresión es del tipo

$$W = \gamma Q l \lambda$$

con γ constante en algún caso especial —por ejemplo si se consideran sólo los cordones de soluciones de canto constante— pero en general función de λ, aunque dependiente sólo muy levemente de ella en los casos de esbeltez alta.

Consideraremos ahora las relaciones posibles entre la carga total Q y el peso propio P. El caso de referencia más sencillo consiste en suponer que la forma con que ambas cargas se distribuyen es análoga, es decir que en todo caso la carga total y el peso mantienen a lo largo de la luz de la estructura la misma proporción, por lo que supondremos a partir de aquí que tal analogía de forma es aproximadamente cierta.

3.1 Alcance o tamaño máximo.

Supongamos que tratamos de una solución —teórica— en la que la totalidad de la carga es peso propio, y no se admite más carga, por lo que la estructura está en el límite de resistencia sometida sólo a su peso propio —trataremos más tarde el problema del límite de rigidez—. En este caso tendremos que la cantidad de estructura determina la carga totalmente. Supongamos para simplificar, además, que la estructura es estricta, es decir, que todo el material se emplea en su máxima tensión. En este caso el peso de la estructura, que es la carga total, es la cantidad de estructura por el peso específico y dividido por la tensión de servicio.

$$W = \gamma P L \lambda = \gamma W \frac{\rho}{\sigma} L \lambda$$

por lo que eliminando W y despejando la luz L a la que corresponde dicha situación tenemos

$$L = \frac{1}{\gamma \lambda} \frac{\sigma}{\rho}$$

Cualidad importante de la expresión es que dicho tamaño es independiente de las dimensiones de las secciones de la pieza: vale para cualquier W o cualquier P —es independiente de W y de P—, es independiente, por tanto del propio peso de la estructura considerada y por ende vale cualquiera que sea el área básica de la ley de dimensionado elegida. El primer resultado es que el *alcance* de la estructura es independiente de su *dimensionado*.

Es fácil comprender esto, ya que si suponemos que una cierta estructura dimensionada estrictamente —con todas sus secciones sometidas a la máxima tensión admisible— está en su límite de resistencia sólo con su peso, aumentar todas las secciones proporcionalmente —manteniendo por tanto la misma ley de dimensionado— hace aumentar en la misma forma peso y resistencia, por lo que la estructura sigue estando en el límite de resistencia. De este modo el tamaño máximo que puede alcanzar no depende del dimensionado mismo.

Puede comprenderse además que si cambiásemos la resistencia del material, disminuyéndola por ejemplo a una fracción χ de la inicial, la luz alcanzable sería sólo esa misma fracción χ de la luz anterior L. Por la misma razón es fácil ver que la fracción de la tensión que corresponderá al peso propio en una estructura de luz $l = \chi L$ es precisamente $\sigma_p = \chi\sigma$, quedando el resto de la tensión disponible para resistir cargas adicionales.

De este modo el problema del peso propio puede tratarse geométricamente como un problema de tamaño. En dicho problema, alcanzado un *tamaño límite*, o *alcance*, la tensión del material se destina sólo a soportar el propio peso, siendo inviable la estructura para un tamaño mayor. Para tamaños menores al límite, la tensión empleada en sostener el propio peso es a la resistencia total diponible como el *tamaño* es al *alcance*.

$$\chi = \frac{l}{L} = \frac{\sigma_p}{\sigma}$$

Es importante señalar aquí que en la expresión del *alcance* aparecen como parámetros de la geometría de la estructura los términos adimensionales γ y λ, y que la dimensión —la longitud— la aporta la *longitud* del material, su *alcance* σ/ρ.

3.2 Carga y peso propio. Factor de ampliación de carga

Si la estructura soporta la suma del peso propio más la carga externa adicional a éste —$Q = P + R$— podemos determinar en base al apartado anterior qué parte de la tensión admisible del material se emplea para resistir su propio peso, usándose el resto que queda disponible para soportar el resto de la carga. Por ello, si las cargas y los pesos son homólogos en distribución a lo largo de la luz, la carga total será a la carga externa como σ a $\sigma - \sigma_p$. Puede verse de inmediato que la relación entre la carga total y la carga aplicada ajena al propio peso depende sólo del parámetro χ.

$$\frac{Q}{R} = \frac{1}{1-\chi}$$

La expresión puede interpretarse como un factor de ampliación de la carga externa ajena al propio peso, ampliación necesaria para incorporar dicho peso propio. Es un factor de ampliación no lineal que depende de la proporción existente entre el *tamaño* de la estructura y el *alcance* de la solución empleada, proporción que ha sido denominada *talla* en alguna ocasión.

Nótese, por tanto que tanto el *alcance* de la estructura L, como la *talla* χ son magníficos candidatos para definir la *eficacia* o *eficiencia* de la estructura, en tanto que permite predecir, para cualesquiera tamaños del problema, la relación entre carga soportada y peso propio que, según vimos, es una de las expresiones más utilizadas para evaluar la eficiencia relativa de soluciones estructurales. Pues en efecto, dado el tamaño pretendido para la estructura, l, y el *alcance* L, su cociente χ (su *talla*) permite obtener dicha relación de eficacia, siendo tanto mayor cuanto mayor es el *alcance*

$$\frac{R}{P} = \frac{Q-P}{P} = \frac{1-\frac{P}{Q}}{\frac{P}{Q}}$$

$$\frac{R}{P} = \frac{1-\chi}{\chi} = \frac{1}{\chi} - 1$$

Sin embargo en la medida del alcance de una estructura o su talla queda incluida una dimensión procedente del material, por lo que para independizar el parámetro de medida de eficiencia de la forma respecto de las cualidades del material habremos de considerar sólo los términos dependientes de la estructura, a saber, γ, derivado de las propiedades geométricas generales del tipo empleado, y λ, su esbeltez, siendo la eficiencia inversamente proporcional al producto de ambos.

La eficiencia de un tipo estructural se mide, pues, por el inverso del producto de los parámetros de forma de la estructura que hemos denotado por γ y λ.

4 Cualidades geométricas: parámetros estructurales de la forma.

Revisemos nuevamente la expresión:

$$W = \gamma Q l \lambda.$$

Consideremos esta expresión genérica de la cantidad de estructura deslindando las cuestiones derivadas del problema estructural que debe ser resuelto de las cuestiones asociadas a la eficacia con que se resuelve. Podemos ver que dos de los términos, Q y l, corresponden esencialmente a características del problema planteado, a saber, la luz a cubrir y la carga a soportar. Mientras que los otros dos, γ yλ responden a las decisiones tipológicas y geométricas adoptadas al definir la estructura, y de las que depende la eficacia de la estructura adoptada. Ambos definen realmente la *ineficacia estructural*, inversa a la *eficacia*, tal como la hemos considerado en el apartado anterior. Resulta alentador la sencillez obtenida, al constatar que los resultados a los que llegamos permiten afirmar con precisión que la cantidad de estructura invertida es proporcional tanto al tamaño del problema, como a la carga aplicada, como a la *ineficacia* empleada en la solución, ineficacia que nunca alcanzará el valor cero en las obras humanas.

La cantidad de estructura depende por tanto directamente de los términos:

Q

La carga total a trasladar a los apoyos en el problema considerado. Incluye la totalidad del peso aplicado a la estructura, incluyendo el propio peso de la misma.

l

La dimensión del problema de flexión, entendida como la luz entre apoyos.

λ

la esbeltez de la pieza.

γ

Término que en su forma más general es dependiente de la esbeltez —del cociente entre esbeltez óptima y esbeltez real— y que queda determinado fundamentalmente por la geometría general de la solución. Ésta incluye las condiciones de forma de la carga y su proximidad relativa al apoyo, las condiciones de apoyo, la geometría genérica de la sección, etc., condiciones todas ellas a las que podríamos englobar en la denominación *esquema* de la solución.

De los términos anteriores el término de carga remite, en forma que no cabe detallar más ahora, al concepto o idea de *dimensionado* o *espesor* de la estructura, que ya comentamos en el apartado 2.1 (Cantidad de estructura). La razón de ello es sencillamente que, para igual problema, distintas cargas supondrán distintos *dimensionados*, y que si el resto de las condiciones son iguales, es decir que, si esquema, tamaño y proporción son iguales, la diferencia de carga entre dos soluciones sólo supondrá diferencias entre los dimensionados de las secciones que mantendrán igual relación de proporcionalidad entre sí que la que mantengan las cargas aplicadas en las dos soluciones. Vemos por lo tanto que pueden quedar descritos inicialmente como parámetros esenciales de la forma estructural los siguientes:

Tamaño

Dimensión, o luz del problema. La luz de referencia de la estructura. Se trata de la la menor distancia entre las regiones de apoyo empleadas.

Proporción

Esbeltez, relación luz-canto, proporción del recuadro rectangular que circunscribe la geometría de la solución, vista en alzado.

Esquema

Características cuasi topológicas del tipo de solución adoptado tipo estructural: incorpora el tipo de sección, la forma de la carga, las condiciones de apoyo. Se caracteriza por un factor de forma que resulta especialmente sensible a las condiciones de continuidad de las piezas flectadas, como hemos visto en el caso de las vigas. Es igualmente sensible, aunque con menos variabilidad, a las condiciones de apoyo disponibles —bordes paralelos o contorno de un recinto cerrado— y depende finalmente con sensibilidad menor aún de otros aspectos tipológicos, como el trazado de la estructura —siempre que éste responda a formas estructurales globalmente correctas—, etc.

Dimensionado

o espesor o grosor de la solución estructural. Este término puede precisarse más, aunque no lo hagamos ahora rigurosamente, como la relación entre el espacio ocupado por la estructura y el que estaría disponible para colocarla, una vez fijados los parámetros anteriores. Este sería el caso por ejemplo de la relación entre el ancho de una serie de vigas rectangulares paralelas que soportan un forjado dado, y la separación entre las mismas. Deriva directamente, una vez fijados los anteriores parámetros de forma, del valor de la carga aplicada a la estructura, y tiene una relevancia nula en las cuestiones asociadas a la comparación de la eficacia estructural de tipos o soluciones alternativas.

5 Algunas propiedades básicas de la cantidad de estructura

Hemos analizado la relación entre cantidad de estructura y peso propio, y hemos caracterizado la eficacia de la estructura en base a los parámetros que gobiernan ambas magnitudes. Hasta el momento hemos tratado cuestiones básicamente asociadas al requisito de resistencia, dado que la relación entre cantidad de estructura y peso remite a la cuestión de la tensión admisible o tensión de trabajo. Sin embargo existen igualmente relaciones de gran interés asociadas al criterio de rigidez, que vamos a tratar de elucidar igualmente. Para ello analizamos previamente algunas cuestiones teóricas ligadas a la cantidad de estructura, cuestiones que podríamos haber considerado en abstracto al principio del texto, pues son de una gran generalidad, pero que ahora, a la vista del interés de la magnitud que estamos manejando, revelan toda su importancia.

5.1 Cantidades de estructura traccionada y comprimida. Número de Maxwell

Para caracterizar algunas propiedades importantes de la cantidad de estructura es de gran utilidad el uso de un valor próximo desde el punto de vista teórico, al que llamamos *número de Maxwell*, y definido como

$$M = \int N\, dl.$$

Ahora no se trata del valor absoluto de los esfuerzos N, como en W, sino que la tracción suma con signo positivo en la magnitud considerada mientras que la compresión lo hace con signo negativo.

Es fácil comprender que si llamamos W^+ a la cantidad de estructura de tracción, o traccionada, —la contenida en las barras traccionadas— y W^- a la de compresión, o cantidad de estructura comprimida, la cantidad de estructura total es

$$W = W^+ + W^-$$

y el número de Maxwell es

$$M = W^+ - W^-$$

5.1.1 Constancia del número de Maxwell

La primera propiedad de interés es que, para estructuras que solucionan el mismo problema —las mismas cargas y las mismas reacciones en valor y posición— por muy diferentes que sean en forma o concepto, el número de Maxwell es el mismo.

La demostración es fácil, además de aportar un método para hallar dicho número independientemente de la estructura. Considérese el espacio en que se encuentra el problema —cargas y reacciones en equilibrio— y sométasele a una expansión uniforme en torno a un punto fijo. Todas las dimensiones del espacio crecen igualmente en dicha expansión en un factor $1 + \epsilon$ En dicha expansión las cargas y reacciones $\vec{F}$ se desplazan lo que los extremos de sus vectores posición $\vec{X}$ y se mueven por tanto según $\epsilon\vec{X}$, realizando un trabajo —exterior— igual a $\epsilon\vec{F} \cdot \vec{X}$. En dicha expansión todas y cada una de las estructuras concebibles para equilibrar tales cargas realizarían un trabajo interno igual a dicho valor —por tanto igual en todas ellas—. Pues en efecto, si las estructuras tienen esfuerzos que corresponden a un estado de equilibrio con las cargas, constituirán situaciones estáticamente admisibles. Puesto que la expansión uniforme genera un campo de movmientos y deformaciones cinemáticamente admisible —sin rupturas— es de aplicación el principio de los trabajos virtuales, y en virtud de dicho principio el trabajo interno y el externo obtenido por cargas y esfuerzos en cada una de las estructuras en dicho movimiento serán iguales. El trabajo externo de las cargas, igual al interno, sería pues en cada estructura igual a la integral del esfuerzo interno por la dilatación impuesta, es decir $\int N\epsilon\, dl$ o lo que es igual $\epsilon \int N\, dl$.

Por lo tanto resulta

$$\epsilon \int N\, dl = \epsilon\vec{F} \cdot \vec{X}.$$
$$M = \int N\, dl = \vec{F} \cdot \vec{X}.$$

Dicho valor es igual sea cual sea la estructura, y es independiente de cual sea el punto de referencia considerado, dado que cambiar de referencia no supone más que considerar un movimiento rígido entre ambas referencias, y para tal movimiento el trabajo externo es nulo al estar cargas y reacciones en equilibrio.

La importancia del anterior aserto, también denominado **Teorema de Maxwell**, se encuentra en la comparación entre estructuras, puesto que el número de Maxwell es igual a la diferencia constante entre la cantidad de estructura traccionada y la comprimida en todas las estructuras que solucionan un mismo problema.

$$M = \int N\,ds = \int^{+} N\,ds + \int^{-} -N\,ds = W^{+} - W^{-}.$$

De ello se deduce que reducir la cantidad de estructura de una de las partes, por ejemplo la parte traccionada, implica de inmediato reducir la de la otra, la comprimida, de modo que minimizar una de las dos partes es minimizar la cantidad de estructura total. Se deriva de ello que cualquier estructura sólo comprimida o sólo traccionada es mínima, siendo además idéntica a cualquier otra solución con sólo tracción o compresión. Esto permite justificar una de las reglas de transformación formal más importantes en la exploración de estructuras espaciales, que queda definida por la figura 4.

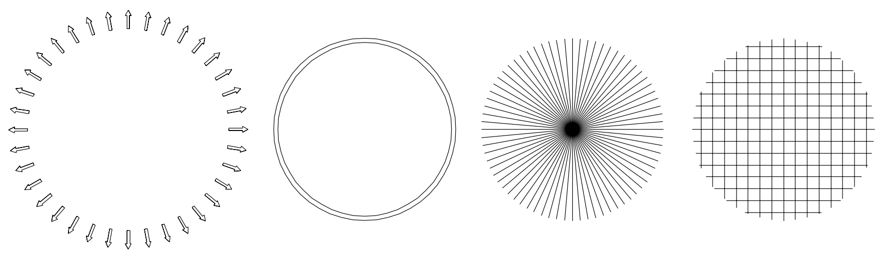


Figura 4: Soluciones alternativas idénticas a un problema de tracción: anillo, red de radios, o malla.

La identificación del número de Maxwell permite además caracterizar los problemas estructurales como problemas de *flexión* cuando $M = 0$ —problemas de traslado transversal de cargas—, de tracción predominante si $M > 0$, o de compresión predominante si $M<0$. En estos dos últimos casos, salvo que se trate de problemas con soluciones sólo traccionadas o comprimidas se tratará de problemas combinados de flexión, en los que el cociente entre M y W permite dar una idea de la importancia relativa entre las partes transversal y longitudinal del traslado de las cargas. En el caso particular de los problemas de flexión —$M = 0$, como en el caso de cargas y reacciones ortogonales a una recta o directriz dada—, las cantidades de estructura en tracción y compresión serán necesariamente iguales, resultado que hemos constatado en el apartado 2.4 (Cantidad de estructura en arcos funiculares). Cabe añadir, finalmente, que son los problemas de traslado transversal de cargas los que tienen mayor incidencia formal, puesto que a diferencia de los de traslado longitudinal, a los que bastaría esencialmente una dimensión en la forma estructural que los resuelve, a saber, la de la línea o directriz que materializa dicho traslado, los traslados transversales de carga requieren una dimensión más, pues no basta con la directriz, se requiere el canto ineludiblemente, y la forma de materializar dicho canto es central en la apariencia de la estructura.

5.2 Cantidad de estructura horizontal y vertical.

Hemos visto en los apartados anteriores una primera división de la cantidad de estructura en dos partes, traccionada y comprimida. Recordando el caso de los arcos tiene sentido considerar una nueva división de nuevo tipo, a saber, la cantidad de estructura que puede contabilizarse en traslados horizontales de carga, y la contenida en traslados verticales de carga. Suponemos estructuras planas o tridimensionales, realizadas mediante barras sometidas a esfuerzos axiles, en las que las barras pueden tener orientaciones variadas en el espacio. La cantidad de estructura puede medirse con

$$W = \int |N|\, dl = \int |\vec{N} \cdot \vec{dl}| = \int (|N_x\, dx + N_y\, dy + N_z\, dz|) = \int (|N_x|\, dx + |N_y|\, dy + |N_z|\, dz).$$

lo que es admisible dado que los esfuerzos N y las longitudes dl de las barras están alineadas, por lo que los signos de sus tres componentes son simultáneamente iguales si la barra está traccionada, o contrarios si está comprimida.

Llamamos cantidad de estructura vertical $W^{"}$ a la parte vertical de dicha expresión

$$W^{"} = \int |N_z|\, dz$$

y cantidad de estructura horizontal $W^{=}$ a la parte horizontal de la misma

$$W^{=} = \int |N_x|\, dx + \int |N_y|\, dy$$

Si la estructura es de barras de dimensión finita, las expresiones serán sumas:

$$W^{"} = \sum |N_{iz}| l_{iz}$$

$$W^{=} = \sum |N_{ix}| l_{ix} + \sum |N_{iy}| l_{iy}$$

5.2.1 Cambios de forma y estructuras afines. Esbeltez óptima.

Podemos analizar las transformaciones de forma más sencillas, a saber, las transformaciones afines, y analizar tanto las condiciones de equilibrio como de consumo en cantidad de estructura derivadas de tales transformaciones. No vamos a hacerlo de forma sistemática y total, dado que la transformación que tratamos de entender es fundamentalmente la derivada del cambio de canto de la estructura manteniendo los demás parámetros de forma inmutables. Respecto del problema general, baste aquí recordar que cualquier transformación afín que modifique simultáneamente fuerzas (acciones, esfuerzos axiales y reacciones) y longitudes aplicada a una estructura en equilibrio producirá una nueva estructura que estará igualmente en equilibrio.

Consideramos la transformación de las componentes verticales de fuerzas y longitudes al afectarlas por un factor α: si el factor es menor que 1 se tratará de una reducción de canto, y si es mayor, de un aumento de canto. Escribimos las ecuaciones de equilibrio considerando las fuerzas que actúan sobre cualquier región de la estructura, incluyendo las cargas P y las componentes ejercidas por los esfuerzos Nsobre los cortes que aislan dicha sección. Las componentes horizontales de fuerzas y dimensiones se mantienen sin alteración. El equilibrio de fuerzas horizontales de la estructura original se mantiene pues en la transformada. Las componentes o distancias horizontales no cambian, por lo que los equilibrios de momentos respecto a un eje vertical se mantienen igualmente.

$$\sum P_{ix} + \sum N_{ix} = 0$$

$$\sum P_{iy} + \sum N_{iy} = 0$$

$$\sum y_i P_{ix} - \sum x_i P_{iy} + \sum y_i N_{ix} - \sum x_i N_{iy} = 0$$

En el caso de las fuerzas verticales totales que actúan, incluyendo las componentes verticales de los esfuerzos ejercidos en los cortes realizados, así como en el de los momentos correspondientes a equilibrios respecto de los ejes horizontales OX, OY, se alteran los equilibrios iniciales

$$\sum P_{iz} + \sum N_{iz} = 0$$

$$\sum z_i P_{ix} - \sum x_i P_{iz} + \sum z_i N_{ix} - \sum x_i N_{iz} = 0$$

$$\sum y_i P_{iz} - \sum z_i P_{iy} + \sum y_i N_{iz} - \sum z_i N_{iy} = 0$$

a los nuevos equilibrios resultantes del cambio afín:

$$\sum \alpha P_{iz} + \sum \alpha N_{jz} = 0$$

$$\sum \alpha z_i P_{ix} - \sum x_i \alpha P_{iz} + \sum \alpha z_i N_{ix} - \sum x_i \alpha N_{iz} = 0$$

$$\sum y_i \alpha P_{iz} - \sum \alpha z_i P_{iy} + \sum y_i \alpha N_{iz} - \sum \alpha z_i N_{iy} = 0$$

Ahora bien, en dicho cambio se han alterado las cargas, al cambiar sus componentes verticales, por lo que la nueva estructura no resuelve el mismo problema que la anterior.

Debemos remediar la situación volviendo a restaurar a su valor inicial a las componentes verticales de las cargas, que ahora son αP_{iz}, para lo que bastaría dividirlas por α. Sin embargo esto alteraría el equilibrio de fuerzas verticales, a la vez que los equilibrios de momentos respecto de los ejes horizontales, por lo que la alteración requiere ajustes adicionales.

Para mantener el equilibrio de fuerzas verticales se requerirá que las componentes verticales de los esfuerzos se alteren en igual modo, restaurándolas a su valor original:

$$\sum \frac{\alpha P_{iz}}{\alpha} + \sum \frac{\alpha N_{jz}}{\alpha} = 0$$

Esto exige además, para mantener la alineación de los esfuerzos con las barras, que las componentes horizontales de tales esfuerzos se alteren en igual medida, al igual que las componentes horizontales de las cargas y las reacciones. De modo que la alteración de las dimensiones verticales al multiplicarlas por un factor α sin cambio en las componentes verticales de las fuerzas implica, para que se mantenga el equilibrio, un cambio inverso en las componentes horizontales de fuerzas y esfuerzos (que se multiplicarán por $\frac{1}{\alpha}$). En estas condiciones las ecuaciones de equilibrio vuelven a cumplirse, como vemos a continuación:

$$\sum \frac{1}{\alpha} P_{ix} + \sum \frac{1}{\alpha} N_{ix} = 0$$

$$\sum \frac{1}{\alpha} P_{iy} + \sum \frac{1}{\alpha} N_{iy} = 0$$

$$\sum P_{iz} + \sum N_{iz} = 0$$

$$\sum y_i P_{iz} - \sum \alpha z_i \frac{1}{\alpha} P_{iy} + \sum y_i N_{iz} - \sum z_i N_{iy} = 0$$

$$\sum \alpha z_i \frac{1}{\alpha} P_{ix} - \sum x_i P_{iz} + \sum \alpha z_i \frac{1}{\alpha} N_{ix} - \sum x_i N_{iz} = 0$$

$$\sum y_i \frac{1}{\alpha} P_{ix} - \sum x_i \frac{1}{\alpha} P_{iy} + \sum y_i \frac{1}{\alpha} N_{ix} - \sum x_i \frac{1}{\alpha} N_{iy} = 0$$

Por tanto una reducción de canto implica un aumento de las fuerzas y esfuerzos horizontales en un factor inverso para que se mantenga el equilibrio. Si consideramos cargas gravitatorias —verticales— el ajuste de esfuerzos —y de reacciones en caso de tener componentes horizontales, como en el caso de los empujes de arcos— supondrá una alteración en la cantidad de estructura que ahora podemos analizar. Las cantidades de estructura iniciales, horizontal y vertical se alterarán de forma fácilmente predecible a partir de los valores originales:

$$W^{"}_{\alpha} = \sum |N_{iz}| \alpha l_{iz} = \alpha W^{"}$$

$$W^{=}_{\alpha} = \sum |\frac{1}{\alpha} N_{ix}| l_{ix} + \sum |\frac{1}{\alpha} N_{iy}| l_{iy} = \frac{1}{\alpha} W^{=}$$

Se observa que ambas componentes se modifican de forma inversa, mientras una decrece la otra crece, de modo que podemos afirmar que su producto se mantiene constante. Dado que la cantidad de estructura total es la suma de ambas partes, el óptimo se obtendrá cuando éstas sumen el valor mínimo. Ahora bien, el mínimo de la suma de dos cantidades cuyo producto es constante se produce cuando ambas son iguales, como puede comprenderse si se considera la suma como el semiperímetro de un rectángulo y el producto como el área del mismo. A igualdad de área el perímetro mínimo es el del cuadrado.

De modo que los valores óptimos de la cantidad de estructura vertical y horizontal son la media geométrica de las originales

$$W^{"}_{o} = W^{=}_{o} = \sqrt{W^{"} W^{=}}$$

El correspondiente factor de alteración en las dimensiones verticales resulta ser igual al cociente entre la cantidad de estructura vertical óptima y la original

$$\alpha_o = \frac{W^{"}_{o}}{W^{"}}$$

El canto óptimo de la estructura se alterará en proporción a dicho valor, y por ende la esbeltez óptima, que es igual al cociente entre el tamaño (invariable) y el canto óptimo, resultará de multiplicar la esbeltez original por el inverso de dicho valor,resultando

$$\lambda_o = \lambda \frac{W^{"}}{\sqrt{W^{"} W^{=}}} = \lambda \frac{\sqrt{W^{"} W^{=}}}{W^{=}}$$

Hay que hacer notar aquí que la condición geométrica empleada para la transformación se cumple en piezas trianguladas a costa de un cambio en los ángulos de la triangulación. Por la misma razón, las transformaciones de canto de piezas de alma llena no pueden ser consideradas en rigor incluidas entre éstas, dado que los cambios de canto no alteran la *optimidad* en los ángulos implícitos en el material del alma, que sigue trabajando como dos familias traccionada y comprimida a 45ˆ.

Se deduce una interesante consecuencia de la precedente propiedad al analizar el problema de los arcos con péndolas estudiado en el apartado 2.4 (Cantidad de estructura en arcos funiculares).

Veíamos que en dicho problema las soluciones óptimas consisten en un arco trazado según el antifunicular de las cargas, que cuelgan de él mediante péndolas, y con tirante entre los apoyos, cuando la cantidad de estructura en péndolas —vertical traccionada— iguala la cantidad de estructura en tirante —horizontal traccionada— y su suma iguala la cantidad de estructura del arco —que contiene componentes iguales en cantidad de estructura horizontal y vertical comprimidas—

En este caso, pues, la cantidad de estructura puede medirse por 4 veces la de cualquiera de dichas partes, que podemos emplear como unidad. Si por ejemplo elegimos la traccionada horizontal, el tirante, tendremos $1 = W^{+=}$

$$\begin{aligned} W^{+"} = W^{+=} = W^{-"} = W^{-=} = 1 \\ W = W^{+} + W^{-} = W^{+"} + W^{+=} + W^{-"} + W^{-=} = 4 \\ W^{"} = W^{=} = 2 \end{aligned}$$

La condición de óptimo queda comprobada al ser las cantidades horizontal y vertical iguales, y siendo nulo en este problema el número de Maxwell son también iguales las cantidades traccionada y comprimida.

Vamos a acometer una nueva transformación de geometría. Supongamos que desdoblamos la estructura en dos partes idénticas de carga mitad cada una mediante un corte plano vertical. Tendremos ahora ocho partes idénticas en la cantidad de estructura. Supongamos que invertimos una de las dos mitades: las péndolas y tirante en tracción se convertirán en ella en montantes y cordón comprimido, mientras que el arco comprimido pasa a ser un hilo traccionado. El canto total se duplica, por lo que la esbeltez total pasa a ser la mitad ($\lambda_t = \frac{\lambda}{2}$). Las aportaciones a las componentes horizontal y vertical de la estructura se mantienen en todas las piezas tras la inversión propuesta.

Ahora bien, si unimos ahora ambas mitades, resultará que las dos piezas horizontales —tirante del arco más cordón comprimido del hilo— dejan de ser necesarias, puesto que en cada apoyo el empuje del arco pasa a equilibrarse con la componente horizontal del anclaje del hilo. El tirante y cordón horizontal comprimido, al superponerse, se transforman en línea neutra sin esfuerzo. De este modo eliminamos la estructura que antes correspondía al tirante, es decir, la mitad de la estructura horizontal, con lo que las cantidades de estructura de la estructura transformada pasan a ser $W_t^{=} = 1$, $W_t^{"} = 2$, $W_t = 3$. Evidentemente no se trata de un óptimo —aunque haya disminuido la cantidad original en un 25%—. Por ello podemos determinar el cambio afín en el canto que optimiza la solución.

Se logrará el óptimo con

$$\begin{aligned} W_{to}^{"} = W_{to}^{=} = \sqrt{W_t^{"} W_t^{=}} = \sqrt{2} \\ W_{to} = 2\sqrt{2} \\ \alpha_o = \frac{W_{to}^{"}}{W_t^{"}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_o = \lambda_t \frac{W^{"}}{\sqrt{W^{"} W^{=}}} = \lambda_t \frac{2}{\sqrt{2}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Es decir que, aumentando el canto original en $\sqrt{2}$ (reduciendo la esbeltez en $\sqrt{2}$) la cantidad de estructura total se reduce en el mismo factor. El hecho de tener curvatura en ambos cordones, es decir el poder apoyar carga transversal en ambos, mejora la eficacia de la estructura. La simetría respecto de la horizontal aumenta la eficacia de la forma inicial.

5.3 Cantidad de estructura y rigidez.

La tercera propiedad de extremo interés es la relación inmediata y directa que existe entre consumo estructural —cantidad de estructura— y deformabilidad. relación Puede enunciarse con claridad y rigor comparando propiedades entre dos estructuras realizadas con igual empleo de las propiedades del material de que se componen.

La propiedad consiste en que, siendo igual el aprovechamiento del material, dos estructuras distintas para el mismo problema tendrán deformabilidades proporcionales a su cantidad de estructura, de modo que la de más consumo será también la más deformable.

Para medir la deformabilidad de estructuras en competencia de una forma totalmente general podemos medir la pérdida de energía potencial de las cargas aplicadas a la misma, que para deformaciones homotéticas entre sí es proporcional a cualquiera de los desplazamientos de referencia que queramos considerar. Tenemos, por el principio de los trabajos virtuales y considerando el sistema equilibrado y compatible que constituye la estructura, que dicha pérdida de energía es igual al trabajo interno total —energía de deformación más energía complementaria—:

$$U = \sum P_i \delta_i = \int \epsilon\sigma \, dV$$

lo que lo hace inmediatamente proporcional a la deformación unitaria media del material y a la cantidad de estructura empleada.

$$\sum P_i \delta_i = \int \epsilon\sigma \, dV = \int \epsilon\sigma A \, dl = |\epsilon_m| \int |\sigma| A \, dl = |\epsilon_m| W.$$

Puede comprenderse el sentido de la expresión, también denominada **Teorema de la rigidez**, y que a primera vista parecería antiintuitiva, considerando que si se emplea el material con iguales deformaciones unitarias en todas partes, toda la estructura de más que se añade al alterar —y empeorar— una solución concreta sólo sirve estructuralmente en la medida en que añade la correspondiente deformación de la parte de estructura añadida. De este modo aumentar la cantidad de estructura sólo puede suponer aumentar la deformación final de la estructura. La afirmación se hace evidente si comparamos, por ejemplo, la cantidad de material y las correspondientes deformabilidades de vigas de distinto canto para el mismo problema.

De este modo la eficacia estructural lograda mediante formas adecuadas se traduce no sólo en menos estructura, sino por igual razón en menos deformación global. La estructura más eficaz es siempre también la más rígida. Toda estructura que se disponga de más supondrá inevitablemente deformación adicional.

La importancia de la afirmación se hace evidente desde muchos puntos de vista. Considerando en primer lugar la relación en el sentido que deduce la deformabilidad de la cantidad de estructura, asociamos buenas estructuras desde el punto de vista del consumo con buenas estructuras desde la perspectiva de la rigidez, ligando directamente el peso propio de soluciones alternativas con su deformabilidad respectiva. Esta perspectiva permite comprender las limitaciones de uso de los materiales estructurales en edificación asociadas a su deformación unitaria en servicio.

Sin embargo la mayor potencia de la expresión está en la relación opuesta, que deduce la cantidad de estructura de la deformabilidad. Podemos deducir aquélla de ésta, de modo que tenemos una posibilidad de estimar la cantidad de estructura directamente a partir de imágenes de las deformabilidades respectivas de soluciones alternativas en pugna. Un ejemplo de la potencia de esta asociación está en la comparación entre soluciones alternativas a las condiciones de apoyo de estructuras que en lo demás sean comparables, como en la siguiente figura.

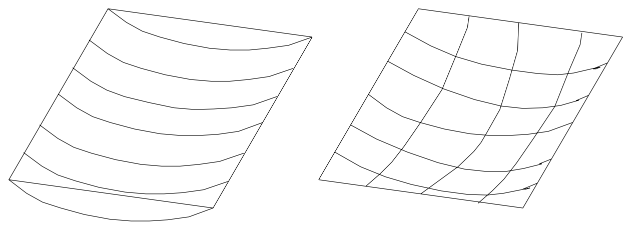


Figura 5: Soluciones alternativas de diferente eficacia en un problema de flexión: apoyo en dos lados o en el contorno.

Pues en efecto, si consideramos dos soluciones alternativas realizadas con vigas para cubrir un recinto cuadrado, en las que la decisión sobre canto sea idéntica, y con igual empleo del material, —que hacemos estricto en ambos casos— resultará que las curvaturas derivadas de dicho uso del material y dicho canto resultarán cilíndricas de un cierto radio de curvatura en el caso de las vigas apoyadas en dos extremos, y esféricas con el mismo radio de curvatura para el centro del cuadrado, siendo de curvatura anticlástica de radios de igual valor y signo contrario en los octavos correspondientes a las cuatro esquinas del cuadrado cuando las vigas se apoyan en todo el contorno. De este modo, la relación entre las cantidades de estructura empleadas en ambas soluciones sería la misma, para carga uniforme, que la relación entre los volúmenes que ocupa la gráfica de las deformadas, por lo que queda en evidencia la ventaja del apoyo en todo el recinto, y puede incluso estimarse con mucha rapidez el valor que dicha ventaja supone.

Considerando la relación anterior es ahora evidente la identidad que hemos podido constatar entre las cantidades de estructuras de los dos sistemas estructurales en flexión destinados a sostener cargas uniformes aplicadas a una superficie circular que se apoya en la circunferencia que la encierra. Pues en efecto, para igual aprovechamiento del material e igual canto todas las soluciones han de tener igual curvatura local en las direcciones en que estén colocadas las vigas, lo que corresponde como aproximación de primer orden, a una curvatura esférica en todos los casos. Es exactamente esférica en los casos radiales, y es igual en la aproximación de primer orden en los casos de mallas ortogonales o de vigas paralelas apoyadas en la circunferencia. De modo que la ventaja de las soluciones bidireccionales se revela en este caso con claridad como una ventaja derivada exclusivamente del mejor aprovechamiento del apoyo, y no como una ventaja que pudiera atribuirse al comportamiento bidireccional en sí, pues en efecto, vigas paralelas trabajando unidireccionalmente resuelven este problema particular con idéntica eficacia que cualquiera de las soluciones bidireccionales.

5.3.1 Dimensionado regido por los requisitos de rigidez.

Como hemos visto, la cantidad de estructura determina la flexibilidad de la estructura, puesto que

$$\sum P_i \delta_i = \delta_r \sum P_i \frac{\delta_i}{\delta_r} = |\epsilon_m| W.$$

expresión en la que empleamos ahora un desplazamiento de referencia prefijado, denominado δ_r para medir la flexibilidad.

Como ya se ha afirmado más arriba, si las soluciones alternativas que se consideran tienen deformaciones homotéticas, lo que es el caso cuando las alternativas sólo se refieren a condiciones geométricas limitadas, resultará que la pérdida de energía potencial de las cargas es proporcional en todas ellas a dicho desplazamiento. Si dicho desplazamiento superase las limitaciones impuestas por la condición de rigidez, debería ser reducido para poder cumplir éstas, y si la reducción debe hacerse sin cambio en los parámetros principales de la forma, —*esquema, tamaño, proporción*— tendrá que lograrse con base a un aumento del dimensionado de las secciones de la estructura al objeto de reducir sus tensiones y las correspondientes deformaciones unitarias máximas y medias. De modo que la inversión en material responderá a idénticas necesidades que las que representaría el empleo de otro material de menor deformación unitaria admisible.

En particular, y considerando que a menudo las limitaciones de rigidez son limitaciones de deformación relativa a la luz tendremos

$$\delta_r \sum P_i \frac{\delta_i}{\delta_r} = \delta_r O = |\epsilon_m| W = |\epsilon_m| \gamma l \lambda Q$$

$$\frac{\delta_r}{l} = \frac{|\epsilon_m| Q}{O} \gamma \lambda$$

Como Q y O son proporcionales, y su cociente es constante en todas las soluciones de deformada homotética, es fácil ver que el cumplimiento de las limitaciones de rigidez exigirá un sobredimensionado que puede determinarse de inmediato para reducir $|\epsilon_m|$ o, alternativamente, una modificación de la solución estructural que reduzca γ o λ para lograr valores que permitan respetar el límite impuesto.

La expresión anterior nos lleva por tanto rápidamente al concepto de esbeltez límite. Pues al ser la deformación función monótona creciente con la esbeltez —recordando que en las regiones de diseño en que el problema es de rigidez el término γ es bastante estable e independiente de λ, además práctcamente proporcional a ella— y al ser los demás términos invariantes para condiciones comparables en los diseños, resulta de inmediato que existe una esbeltez para la que el diseño estrictamente necesario por resistencia se encuentra igualmente en el límite de deformación admitida. Diseños de menor esbeltez son siempre admisibles desde la perspectiva del criterio de rigidez, y diseños de esbeltez mayor que la límite requieren reducir las deformaciones en proporción que será igual (levemente mayor) a la relación entre la esbeltez real y la esbeltez límite. De este modo la inversión en material en estructuras dimensionadas por criterios de rigidez por realizarse con esbeltez mayor a la límite se deriva del producto entre la cantidad de estructura y la relación de esbeltez a esbeltez límite, lo que en definitiva la hace linealmente dependiente del tamaño, y cuadráticamente dependiente de la esbeltez, como puede comprobarse fácilmente en los diseños de vigas.

6 Tipos estructurales de cubierta

La enorme diversidad de tipos que puede usarse en cubiertas, en contraste con la escasa diponibilidad en los problemas de estructuras de pisos paralelos deriva de las propias características del problema arquitectónico a resolver: basta asegurar que la proyección de la forma cubre la planta, junto con algunos pocos requisitos más que no suponen grandes restricciones formales usualmente, como son la posibilidad de evacuación de aguas, la iluminación del recinto, etc. Pero además, y como hemos visto en los apartados anteriores e ilustraremos en las figuras que siguen, las distintas opciones formales, consideradas y resueltas rigurosamente, no tienen por qué suponer muy distintas eficacias en su comportamiento, por lo que son básicamente intercambiables entre sí. De este modo las cubiertas han dado origen a un extenso repertorio de soluciones, que pueden emplearse en sus múltiples variantes para materializar formas e imágenes muy diversas.

Hay que considerar además que la incidencia espacial de las formas necesarias para cubrir espacios es proporcional al espacio cubierto. Más aún, si para espacios grandes se trata de limitar la inversión estructural requerida, por su mayor peso en la inversiónfinal, se incrementa más aún la incidencia espacial al necesitarse limitar la esbeltez. De este modo el contenido simbólico asociado a las distintas edificaciones utilizadas por el poder —terrenal o celestial— puede transferirse de inmediato a la forma que lo cubre.

La cubierta puede así configurarse como uno de los elementos simbólicos privilegiados en la arquitectura. La opción por una u otra configuración no es sólo una opción intrínseca que deriva de los requisitos internos de la propia edificación y sus leyes físicas propias, sino que al ser las soluciones posibles bastante intercambiables, admite en sí la adición de elementos de significación ajenos a su propias cualidades portantes, ajenos por tanto a su propio valor semántico como elemento arquitectónico implicado en el establecimiento de la *firmitas* de la obra.

Esta cualidad simbólica de las grandes cubiertas ha sido una constante de la arquitectura, aun cuando la extrema diversidad de soluciones formales sea sólo una realidad reciente, puesto que requiere del uso de materiales eficaces tanto en tracción como en compresión para alcanzar toda su virtualidad. En las edificaciones del pasado dicha diversidad quedaba parcialmente limitada al quedar restringida por las capacidades de los materiales compresibles —fábricas—, o a las posibilidades de ensamblaje de la madera.

Para hacer el recorrido formal consideraremos como referencia uno de los dos problemas clásicos de resistencia de materiales desde Galileo: el cruce de un vano con soluciones biapoyadas. (El otro es el voladizo). Se consideran sucesivamente diferentes versiones de la forma apoyada en dos extemos del recinto, sus variantes cuando el apoyo se lleva al contorno completo del recinto, y las alternativas que se deducen de la regla de transformación *anillo-radios-malla* —en planta— o la transformación *de viga en arco* —en alzado—.

6.1 Viga

La solución de viga, en el caso de cubiertas, puede ser de sección maciza —caso de la madera— o aligerada, por triangulación o refuerzo, y en dimensiones pequeñas y medias es insustituible. La viga debe desdoblarse para reducir la dimensión transversal, y las separaciones entre vigas tratan en general de minimizar los costes de las siguientes familias, situándose en un rango difuso entre 1/3 de la luz y 2 metros más 1/8 de la luz.

Las soluciones de viga pueden aprovechar la continuidad, reduciendo el área de momentos si es posible colocar soportes en el interior, lo que debe hacerse siempre que el uso lo permita.

6.2 Emparrillado

El desdoblamiento de las vigas y su cambio de dirección da lugar al emparrillado que, a igualdad de otras características, tiene un coste teórico levemente menor —dado que la proximidad de las cargas al apoyo mejora. La reducción se asocia al factor de dicha mejora, que pasa a ser cercano a 1/6, frente al 1/4 de

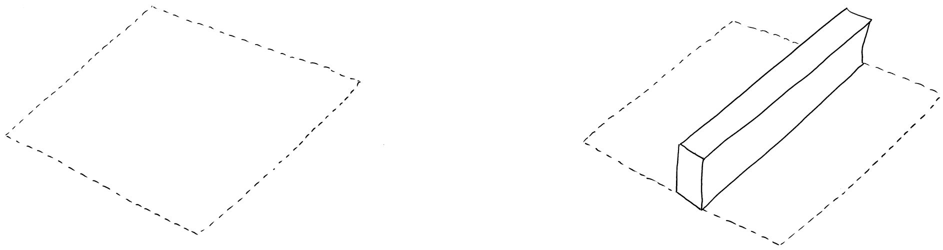


Figura 6: Problema de cubierta ... resuelto con vigas ...

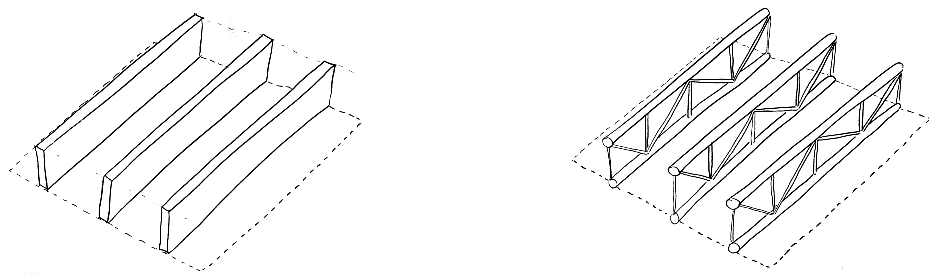


Figura 7: Vigas separadas ... y trianguladas.

la solución precedente, a cambio de mayor complejidad y dificultad constructiva, en particular en lo que se refiere a la necesaria continuidad de los cordones traccionados.

Hay ventaja adicional en la reducción del problema de pandeo del cordón comprimido, y las soluciones que resuelven el cerramiento de la superficie mediante elementos cuadrados concuerdan razonablemente con el tipo, adecuado por tanto para soportar paños de vidrio.

La solución triangulada es sin excepción la malla estérea de pirámides cuadradas al objetode reducir los tipos de nudos distintos del entramado.

El comportamiento de emparrillado podría hacerse más complejo: pasando a la malla de tetraedros tendríamos comportamiento de placa, es decir, con rigidez a torsión. Sin embargo este cambio no aporta mejora práctica alguna frente al emparrillado, exigiendo a cambio una complejidad en los nudos muy superior, por lo que no se trata de una solución usual.

En todo caso, cabe añadir que, tanto la viga como el emparrillado se emplean con regularidad como elementos estructurales de segundo nivel en muchas soluciones que globalmente son de otro tipo, como elementos de rigidización (malla de pirámides cuadradas para producir la doble capa en bóvedas y cúpulas o vigas como

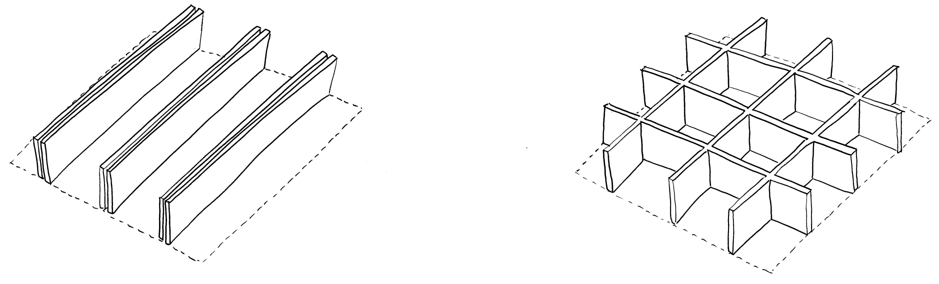


Figura 8: Desdoblando vigas ... para obtener emparrillados.

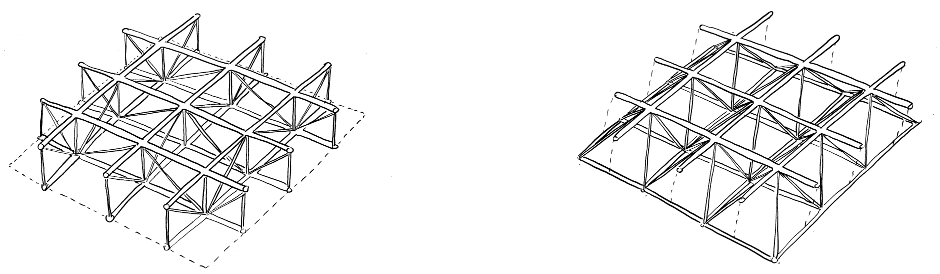


Figura 9: La sencillez exige triangular en malla de pirámides.

segunda o tercera familia estructural en soluciones de todo tipo).

6.3 Arcos paralelos. Bóvedas

La alternativa de dar canto variable a las vigas nos traslada a las soluciones en arco, tras pasar por las piezas de canto variable pero de forma no funicular, es decir, las cerchas. En la medida en que la forma se acerca a la antifunicular de las cargas dominantes, las necesidades de resistir flexiones, bien en la forma global, bien mediante flexión local en el cordón cargado, se reducen.

De todos modos, tanto las alternancias de carga en el cordón cargado, como las necesidades de rigidez en el cordón comprimido exigen rigidez, que puede obtenerse con secciones aligeradas, o trianguladas.

Las diferencias entre los costes globales de una y otra solución pueden entenderse considerando, al igual que en casos anteriores, que las mejoras que pueden producirse —siempre para esbelteces bajas, pues en caso de esbelteces altas siempre serán más eficaces las soluciones precedentes— exigen a cambio una complejidad constructiva mayor, si bien ahora la estructura pasa a suponer una obstrucción espacial mucho menor.

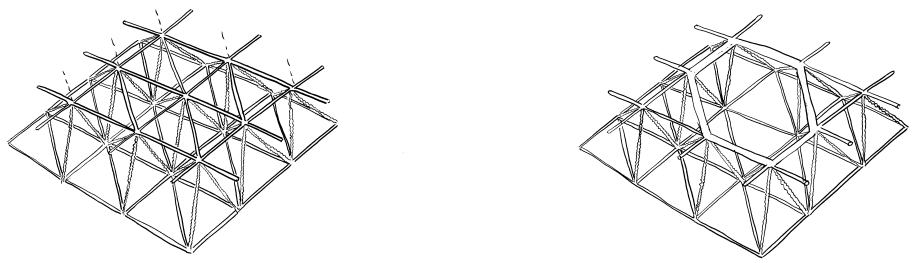


Figura 10: Malla de tetraedros ... con empleo de anillos para abrir huecos

Figura 11: Cerchas ... con cordón superior rigidizado si es preciso.

Las soluciones de arcos paralelos sea cuales sean las secciones con que éstos se resuelven, incluyendo a las bóvedas, corresponden a una misma familia, con las solas diferencias en las formas de sección empleada y en las separaciones entre arcos.

Las soluciones de arco, invertidas, dan lugar a las catenarias, con la dificultad de haber subido el punto de arranque de la estructura y necesitar establecer el cordón comprimido que soporta el empuje por encima de la superficie cargada, o, alternativamente, requiriendo disponer de elementos verticales u oblicuos sometidos a fuertes cargas horizontales.

6.4 Arcos cruzados.

El paso al comportamiento bidireccional, en la misma forma en que se lograba en vigas, puede acometerse con canto variable, en arcos, pero ahora la restricción de mantener los cordones a la misma cota en los puntos de cruce obliga a modificar el contorno del apoyo, pasando a formas poligonales o curvas, en las que la más sencilla será la circunferencia para cubrir superficies circulares.

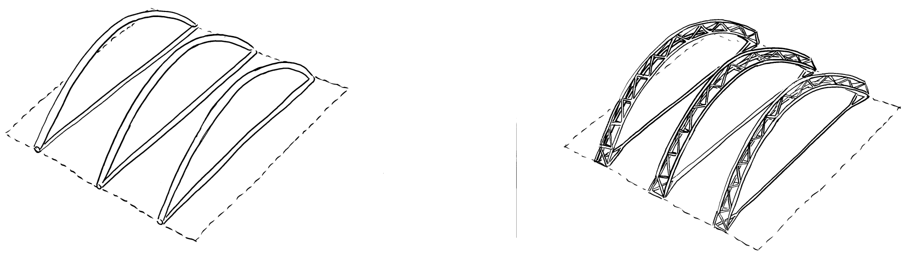


Figura 12: Arcos.

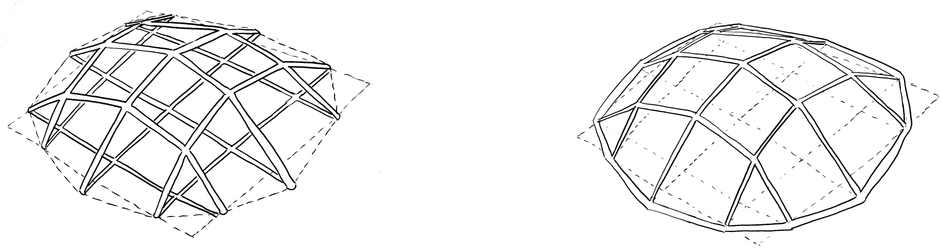


Figura 13: Arcos cruzados: la malla de tirantes se transforma en anillo.

Ahora bien, a partir de esta solución, la malla de tirantes puede ser sustituida por un anillo, que será en gran medida equivalente a la malla precedente para las cargas predominantes, si bien deberá soportar las flexiones derivadas, en los casos de carga alternante, de las diferencias de regularidad en los empujes radiales que resultan. Igualmente a los casos anteriores, la rigidez del arco puede exigir secciones que convenga aligerar mediante una triangulación local.

Pero además ahora puede considerarse la posibilidad de invertir las dos familias de arcos para crear una malla de cables cargada contra un anillo en compresión, solución de escasa rigidez, o invertir sólo una de ellas y crear una familia de arcos compartiendo carga con una familia de catenarias. Si además consideramos el empleo de materiales de alta resistencia en tracción, la solución deriva rápidamente a otra en la que la familia de catenarias se responsabilizará de soportar toda la carga gravitatoria, y la familia que inicialmente era de arcos se empleará para tensar a la anterior, sosteniendo adicionalmente las cargas invertidas, por succión de viento, que pudiesen superar el efecto de las gravitatorias.

El *anillo* exterior se transforma así en un arco inclinado sometido a cargas en la dirección de la superficie de cerramiento, transversales en la clave, y progresivamente acercándose a la tangente a su directriz en las cotas inferiores, arco que, en general tendrá puntos de apoyo o tirantes en su proyección vertical, pero que lleva parte básica de su carga a sus puntos de apoyo, con variantes diversas, y con una importante menor eficacia general, al haberse alejado seriamente las cargas de los puntos finales de apoyo en la cimentación.

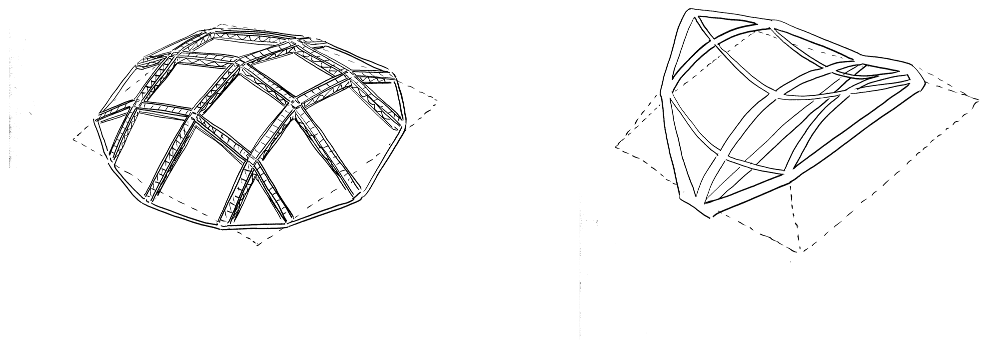


Figura 14: Arcos cruzados

6.5 Arcos radiales. Anillos y cúpulas.

En el apartado 5.1.1 (Constancia del número de Maxwell) hemos hecho mención de las poderosas reglas de transformación formal que el teorema de Maxwell permite emplear, y que hemos aplicado en el apartado anterior para eliminar los tirantes cruzados y sustituirlos por un anillo. Si aplicamos tales reglas al cordón comprimido de la estructura generamos familias estructurales nuevas: basta pensar en sustituir los arcos cruzados por arcos radiales, para, con la misma eficacia, obtener una solución que constructivamente es más regular, salvo en el punto singular en que se cruzan tales arcos. Dichos arcos pueden requerir igualmente su rigidización local, lo que complica aún más el encuentro en el punto único de cruce que configura la clave.

Dicho punto singular, de imposible factura, se resuelve sustituyendo localmente los arcos convergentes por un anillo de compresión —la solución clásica en las construcciones históricas de piedra consiste en un macizo que funciona como disco comprimido biaxialmente—de modo que se resuelve el encuentro de los n medios arcos por n encuentros iguales al anillo central, que puede ser de las dimensiones requeridas para facilitar la unión.

Pero ese anillo puede igualmente ser sustituido por una malla superficial, y una vez iniciado ese camino, proceder a extender la malla a toda la superficie que cubre la solución, dando origen a las cúpulas.

Las cúpulas aportan ahora una variante de altísima importancia, al añadir anillos a lo largo de toda la altura: ahora la forma puede ser rígida si lo es la forma del apoyo, de modo que se necesitan dimensiones mayores para forzar el salto de complejidad que supondría desdoblar las barras individuales en piezas compuestas, siendo usual que el siguiente salto en complejidad venga definido por la necesidad de rigidez conjunta de regiones amplias de la superficie envolvente, lo que exigirá pasar a soluciones de doble (en casos extremos de triple) capa. En este caso las dos capas son en la mayor parte de los casos las caras de una solución que localmente es análoga a los emparrillados o mallas de pirámide cuadrada.

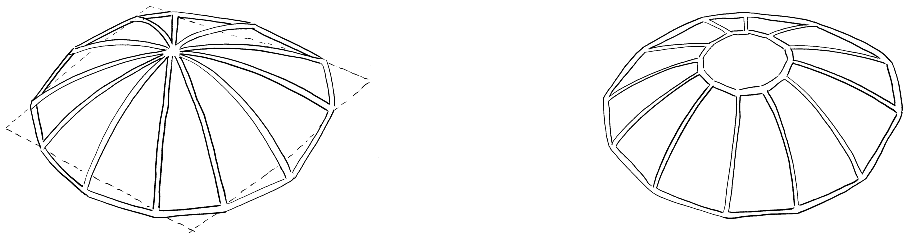


Figura 15: Arcos radiales.

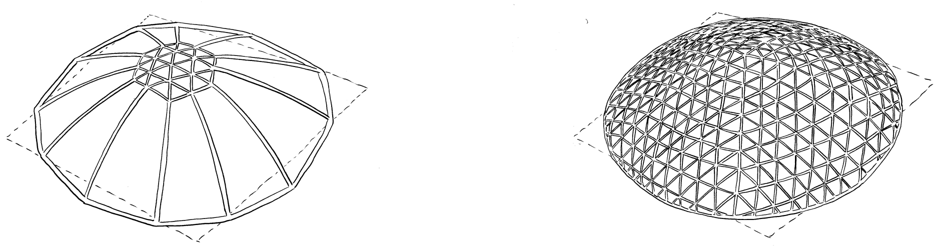


Figura 16: Arcos radiales: transición a la cúpula

6.6 Cerchas radiales. Soluciones híbridas.

Al igual que hemos transformado las mallas de arcos en arcos radiales, podemos tranformar las mallas de vigas, los emparrillados, en vigas radiales, que resolverán el problema del punto singular en el centro mediante un cilindro que combina los anillos de compresión y tracción de los cordones sustituidos en dicho punto, más el alma que los conecta capaz de transferir carga en los casos de no simetría de éstas. Cabe añadir que los cordones en cada anillo requieren rigidez a flexión en su plano para ciertos casos de asimetría.

Pueden sustituirse, sin pérdida de eficacia, parte de los esfuerzos radiales de los cordones comprimido y traccionado por esfuerzos en anillos intermedios, dando lugar a soluciones con mayor número de piezas y de eficacia análoga, pero más adecuadas por su mayor densidad a las situaciones que requieren dimensionados mayores, aplicables por tanto a las soluciones con canto limitado.

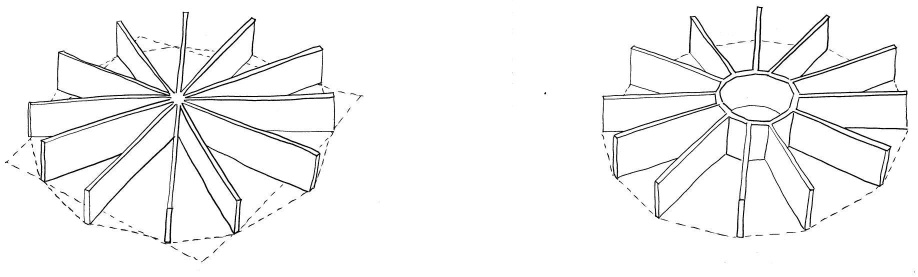


Figura 17: Vigas radiales.

Figura 18: Transformaciones posibles de las vigas radiales.

6.7 Catenarias

La otra alternativa de forma es cambiar la forma de los cordones. Puesto que ya vimos el caso de los cordones comprimidos curvos, los arcos radiales, curvamos el cordón traccionado y tenemos las soluciones de catenaria radial, en las que muy a menudo el anillo central interior es de gran tamaño, dejando abierta una fracción muy importante de la superficie cubierta.

Si unimos, finalmente, arcos y catenarias, tendremos el origen de las soluciones lenticulares, en las que, nuevamente, podríamos considerar que el empleo de materiales de alta resistencia en tracción permite trasladar la totalidad de la carga a las catenarias, transformando la familia de arcos en una estructura destinada a tensar a la anterior, que por tanto invierte su sentido de trabajo y pasa a estar también traccionada a expensas de mayores esfuerzos en el anillo de compresión. Ahora el elemento de conexión entre las dos familias puede ser un fluido si se logra un espacio estanco entre ambas familias, con lo que llegamos a las soluciones lenticulares hinchadas.

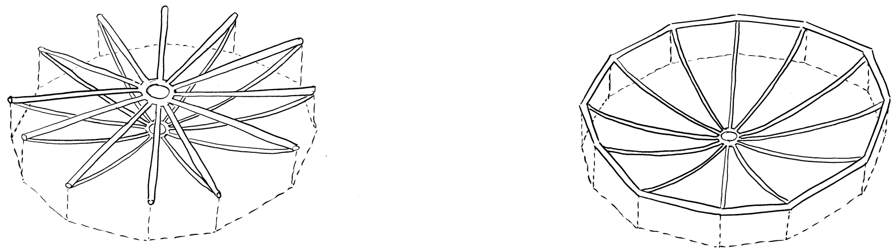


Figura 19: Catenarias radiales, ... mejor con anillo.

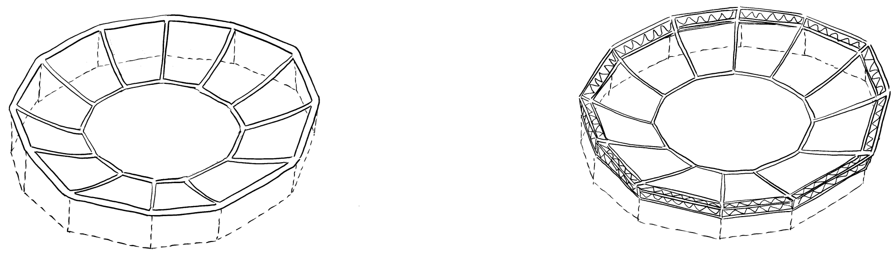


Figura 20: Los anillos en compresión se rigidizan.

7 Conclusiones

Los conceptos establecido en el recorrido realizado, aun con las limitaciones con que han sido aplicados aquí, han mostrado su interés, y su elevado potencial para facilitar la reflexión en profundidad sobre las opciones diponibles a la hora de diseñar.

En dicho recorrido hemos comprobado además que las soluciones formales de las estructuras de cubierta son muy variadas, con eficacias comparables siempre que pueda recurrirse a materiales resistentes tanto en tracción como en compresión. Por ello la atribución de sentido estructural a la forma no requiere ya de un repertorio limitado de éstas como sucedía en el pasado. Sólo exige acotar en márgenes (ciertamente amplios) a un pequeño número de parámetros abstractos de la forma. Forma y eficacia resistente dejan, pues, de tener asociaciones perceptivas simples haciendo inevitable la disociación, en el terreno de la estabilidad, entre el papel semántico y el simbólico de las formas. Podrán ahora atribuirse referentes simbólicos cualesquiera a formas muy diversas. En tanto no se limiten las alternativas disponibles por requisitsos originados en otros campos —acondicionamiento, industrialización— los discursos basados en la fragmentación, la diversidad, la autoría, etc. estarán, pues, justificados aunque sin legitimidad para operar arbitrariamente.

NOTAS

CUADERNO

110.02

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com